



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

**University of Wisconsin**  
**LIBRARY**

Class SDF  
Book K81





**University of Wisconsin**  
**LIBRARY**

Class SDF  
Book K81





ENCYCLOPÉDIE DES TRAVAUX PUBLICS

---

APPLICATIONS

DE LA

FATIGUE GRAPHIQUE

*Tous les exemplaires de l'ouvrage sur les APPLICATIONS  
DE LA STATIQUE GRAPHIQUE devront être revêtus de la  
signature de l'auteur.*

*M. Koechlin*



ENCYCLOPÉDIE

DES

TRAVAUX PUBLICS

Fondée par **M.-C. LECHALAS**, Insp<sup>r</sup> gén<sup>l</sup> des Ponts et Chaussées

---

APPLICATIONS

DE LA

STATIQUE GRAPHIQUE

PAR

**MAURICE KOECHLIN**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE ZURICH  
INGÉNIEUR DE LA MAISON EIFFEL

---

TEXTE

---

**CHARGES DES PONTS ET DES CHARPENTES**  
**POUTRES DROITES, COURBES, PLEINES, A TREILLIS, CONTINUES**  
**ARCS MÉTALLIQUES, FERMES MÉTALLIQUES, PILES MÉTALLIQUES**  
**INFLUENCE DU VENT SUR LES CONSTRUCTIONS, LEURS DÉFORMATIONS**  
**CALCUL DES POUTRES POUR LE LANÇAGE ET LE MONTAGE**  
**PILES EN MAÇONNERIE, CALCUL DES JOINTS DES POUTRES**  
**FORMULES ET TABLES USUELLES.**

---

PARIS

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE  
**BAUDRY ET C<sup>ie</sup>, LIBRAIRES-ÉDITEURS**

15, RUE DES SAINTS-PÈRES

MÊME MAISON A LIÈGE

1889

TOUS DROITS RÉSERVÉS



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Préface</b> .....	XII
----------------------	-----

## CHAPITRE PREMIER

### CHARGES DES PONTS ET DES CHARPENTES MÉTALLIQUES

	Pages
§ 1. — <b>Charges des ponts de chemins de fer</b> .....	3
Surcharges imposées par la circulaire ministérielle du 9 juillet 1877. — Types des locomotives les plus lourdes des chemins de fer français. — Poids des voies au mètre courant. — Poids des ponts en fer au mètre courant.	
§ 2. — <b>Charges des ponts pour routes</b> .....	9
Surcharges imposées par la circulaire ministérielle du 9 juillet 1877. — Disposition des charges pour les voitures les plus lourdes. — Poids morts équivalant aux charges roulantes. — Poids des planchers. — Poids des tabliers métalliques.	
§ 3. — <b>Action du vent</b> .....	16
Son intensité. — Son influence sur les parois qui ne sont pas frappées directement.	
§ 4. — <b>Influence de la température</b> .....	17
Coefficient de dilatation. — Ecart de température.	
§ 5. — <b>Charges des charpentes métalliques</b> .....	18
Poids propre de l'ossature métallique au mètre carré de surface couverte. — Poids de la couverture. — Surcharges de la neige et du vent. — Intensité des vents violents, leur action sur des surfaces inclinées.	

## CHAPITRE DEUXIÈME

### POUTRES A PAROIS PLEINES

§ 1. — <b>Construction du polygone des forces, du polygone funiculaire, des moments fléchissants, des efforts tranchants et de la ligne élastique</b> .....	25
Polygone des forces. — Polygone funiculaire. — Moments fléchissants. — Réactions des appuis. — Efforts tranchants. — Surfaces des moments. — Ligne élastique. — Redressement du polygone funiculaire.	
§ 2. — <b>Poutres en porte-à-faux</b> .....	29
I. Charges uniformément réparties.	
II. Charges concentrées. — Moments fléchissants et efforts tranchants maximums.	
III. Construction des moments fléchissants et des efforts tranchants dans l'exemple de la planche 1.	

	IV. Déformation de la poutre dans le cas d'une section variable.	Pages
	V. Déformation dans le cas d'une section constante.	
§ 3. —	<b>Poutres droites reposant librement sur deux appuis.</b>	37
	I. Charges uniformément réparties. — Moments fléchissants. — Efforts tranchants.	
	II. Charges roulantes. — Moments fléchissants. — Efforts tranchants.	
	III. Cas où la surcharge porte par l'intermédiaire de poutrelles transversales. — Moments fléchissants. — Efforts tranchants.	
	IV. Exemple de construction des moments fléchissants, des efforts tranchants et des déformations verticales. Pl. 2.	
	V. Déformations dans le cas d'une section constante.	
§ 4. —	<b>Poutre reposant sur deux appuis, encastree sur l'un, libre sur l'autre.</b>	57
	I. Détermination des moments fléchissants, des efforts tranchants et des déformations.	
	II. Exemple de construction des moments fléchissants et des efforts tranchants. Pl. 1.	
	III. Poutre à section constante encastree à une extrémité et libre à l'autre, sans porte-à-faux.	
§ 5. —	<b>Poutre reposant sur deux appuis, et se prolongeant en porte-à-faux de part et d'autre.</b>	63
	I. Moments fléchissants et efforts tranchants.	
	II. Construction graphique des moments fléchissants et des efforts tranchants.	
§ 6. —	<b>Poutre reposant sur deux appuis et encastree à ses deux extrémités.</b>	67
	I. Moments fléchissants et efforts tranchants.	
	II. Exemple de construction des moments fléchissants, des efforts tranchants et des déformations verticales d'une poutre encastree à ses deux extrémités.	
	III. Poutre à section constante encastree à ses deux extrémités.	
§ 7. —	<b>Moment de résistance et moment d'inertie d'une poutre.</b>	74
§ 8. —	<b>Calcul des rivets d'une poutre à paroi pleine soumise à la flexion.</b>	77

## CHAPITRE TROISIÈME

### POUTRE A TREILLIS REPOSANT LIBREMENT SUR DEUX APPUIS

§ 1. —	<b>Méthodes de détermination des efforts.</b>	83
	Forces extérieures et forces intérieures. — Méthode de Culmann. — Méthode de Ritter. — Méthode de Cremona. — Comparaison des trois méthodes.	
§ 2. —	<b>Efforts maximums et propriétés des différents systèmes de poutres à treillis.</b>	88
	Efforts maximums dans les membrures. — Efforts maximums dans les barres de treillis et les montants. — Variation des efforts avec la forme des poutres. — Poutres à treillis simple et poutres à treillis multiple.	
§ 3. —	<b>Poutre droite à treillis simple en V. Pl. 4.</b>	96
	Charge permanente. — Surcharge. — Efforts totaux. — Sections et coefficients de travail des pièces.	

# TABLE DES MATIÈRES

VII

	Pages
§ 4. — <b>Poutre à treillis simple en N.</b> Pl. 5.....	98
Données. — Membrures. — Treillis et montants.	
§ 5. — <b>Poutre parabolique simple à treillis double.</b> Pl. 6....	101
Données. — Surcharge. — Membrures. — Tableaux des efforts dans les membrures. — Treillis. — Tableaux des efforts dans le treillis. — Efforts dans les montants.	
§ 6. — <b>Poutre parabolique double.</b> Pl. 7.....	108
Données. — Charge permanente. — Surcharge.	
§ 7. — <b>Résistance au flambage des barres comprimées.</b> .....	111
Formules. — Exemples de calculs de résistance au flambage.	
§ 8. — <b>Efforts secondaires engendrés par la rigidité des attaches</b> .....	117
<b>Note de M. W. Ritter.</b>	
Cas où les barres ont une grande rigidité. — Cas où les barres ont une rigidité moyenne. — Cas où les barres sont très peu rigides. — Conclusions. — Treillis en N. — Efforts engendrés par les pièces de pont. — Treillis double.	
§ 9. — <b>Efforts supplémentaires engendrés par des dispositions défectueuses</b> .....	141
Les fibres moyennes des pièces ne se coupent pas en un même point. — Les barres de treillis ne sont pas situées dans le plan moyen des poutres.	
§ 10. — <b>Déformation des poutres droites à treillis.</b> Pl. 8....	147
Déformation des membrures. — Déformation due aux barres de treillis.	
§ 11. — <b>Déformation d'une poutre à treillis de forme quelconque.</b> .....	150
Exposé de la méthode. — Exemple de la pl. 9.	
§ 12. — <b>Calcul des contreventements.</b> .....	156
I. Tablier à voie inférieure ayant un seul plan de contreventement entre les membrures inférieures.	
II. Tablier à voie inférieure ayant deux plans de contreventement.	
III. Tablier à voie supérieure avec deux plans de contreventement et avec entretoisements sur toute sa longueur.	
IV. Exemple de calcul d'un pont à voie inférieure. Pl. 10.	
V. Exemple de calcul d'un pont à voie supérieure. Pl. 10.	
§ 13. — <b>Calcul des appuis</b> .....	176
Appuis fixes et appuis à rouleaux.	

## CHAPITRE QUATRIÈME

### PILES MÉTALLIQUES

§ 1. — <b>Efforts supportés par les piles</b> .....	181
§ 2. — <b>Charges verticales</b> .....	182
§ 3. — <b>Efforts engendrés par le vent.</b> Pl. 11.....	186
§ 4. — <b>Stabilité et calcul des amarrages</b> .....	189
§ 5. — <b>Déformations.</b> Pl. 9 .....	190
a. Déformations verticales. — b. Déformations horizontales.	



# CHAPITRE CINQUIÈME

CENTRES DE GRAVITÉ. — MOMENTS DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ. — MOMENTS D'INERTIE. — FIBRE NEUTRE. NOYAU CENTRAL.

	Pages
§ 1. — Centres de gravité.....	199
Triangle. — Parallélogramme. — Trapèze. — Quadrilatère.	
— Arc de cercle. — Segment de cercle. — Segment de parabole.	
— Centre de gravité d'une surface quelconque.	
§ 2. — Moments du premier degré.....	205
§ 3. — Moments du second degré. — Moments d'inertie et moments centrifuges.....	207
I. Déplacement des axes parallèlement à eux-mêmes.	
II. Variation des moments du second degré pour une rotation des axes autour d'un point.	
III. Rayon de giration. Ellipse d'inertie et ellipse centrale.	
IV. Antipôle et antipolaire.	
V. Moments d'inertie de quelques figures simples.	
VI. Moment d'inertie d'une section de poutre composée.	
VII. Construction des moments d'inertie par la méthode de Culmann. Pl. 12.	
§ 4. — Fibre neutre. — Noyau central.....	219

# CHAPITRE SIXIÈME

## ARCS MÉTALLIQUES

§ 1. — Introduction.....	225
L'ARC ÉLASTIQUE PAR M. W. RITTER (§§ 2 A 18)	
§ 2. — Déformation élastique.....	229
§ 3. — Déformation d'un élément d'arc à paroi pleine.....	230
§ 4. — Déplacement d'un point invariablement lié à l'élément.....	235
§ 5. — Déformation d'un élément de treillis.....	237
§ 6. — Ellipse centrale de l'arc élastique.....	240
§ 7. — Construction de l'ellipse centrale d'un arc à paroi pleine.....	244
§ 8. — Construction de l'ellipse centrale d'un arc à treillis...	249
§ 9. — Ligne d'intersection des réactions et ligne enveloppe des réactions.....	253
§ 10. — Construction de la courbe d'intersection et de la courbe enveloppe d'un arc sans articulations.....	254
§ 11. — Construction de la ligne des intersections d'un arc à deux articulations.....	260
§ 12. — Charges défavorables des arcs à paroi pleine.....	266
§ 13. — Charges défavorables des arcs à treillis.....	270
§ 14. — Influence d'un changement de température.....	273
§ 15. — Epure d'un arc sans articulation (Pl. 13).....	276
§ 16. — Epure d'un arc à deux articulations sur les appuis (Pl. 14).....	283
§ 17. — Calcul approximatif d'un arc sans articulation.....	287
§ 18 — Calcul approximatif d'un arc à articulations sur les appuis.....	295

## TABLE DES MATIÈRES

IX

	Pages
§ 19. — Calcul complet d'un arc à deux articulations et à paroi pleine avec charge roulante. Pl. 15 et 16.....	299
§ 20. — Arcs à trois articulations. Pl. 17 .....	315
§ 21. — Influence du vent sur les arcs.....	325

## CHAPITRE SEPTIÈME

### POUTRES CONTINUES

§ 1. — Poutre à section variable (Pl. 18).....	338
§ 2. — Poutre à section constante.....	345
I. Ligne élastique, points d'inflexion, lignes d'inflexion.	
II. Détermination des moments sur piles.	
III. Lignes en croix pour différents cas de surcharge.	
IV Influence d'une charge unique agissant en différents points de la poutre. Charges défavorables.	
V. Abaissement des appuis.	
VI. Exemple des planches 19 et 20.	
VII. Détermination approximative des moments et des efforts tranchants.	
§ 3. — Calcul de résistance des poutres d'un tablier continu pendant son lançage.....	381
§ 4. — Exemple de calcul de la résistance d'une poutre à treillis pendant son lançage (Pl. 21)....	385
§ 5. — Déformation d'une poutre pendant son lançage (Pl. 22).	389
§ 6. — Montage en porte-à-faux.....	391
§ 7. — Descente d'un tablier sur ses appuis.....	393

## CHAPITRE HUITIÈME

### CALCUL DES POUTRES DE PONTS TOURNANTS

Considérations générales. — Différents systèmes.....	397
§ 1. — Pont tournant double.....	398
§ 2. — Exemple de calcul d'un pont tournant double (Pl. 23)	400
§ 3. — Pont tournant à double volée.....	409
§ 4. — Pont tournant à volée simple (Pl. 24).....	410

## CHAPITRE NEUVIÈME

### FERMES DANS LES CHARPENTES

Considérations générales. — Conditions pour la rigidité.....	415
§ 1. — Ferme Polonceau à une seule bielle (Pl. 25).....	417
Données, charges, vent.	
§ 2. — Ferme Polonceau à deux bielles (Pl. 25).....	421
Données. — Charge permanente. — Surcharge totale. — Demi-surcharges. — Efforts totaux.	
§ 3. — Ferme de 6 <sup>m</sup> ,00 de portée (Pl. 26).....	424
§ 4. — Ferme à treillis simple avec marquises (Pl. 26).....	425
§ 5. — Console à treillis (Pl. 26).....	427
§ 6. — Ferme à treillis double de 24 <sup>m</sup> ,00 de portée (Pl. 26)..	428

## X APPLICATIONS DE LA STATIQUE GRAPHIQUE

	Pages
§ 7. — <b>Ferme courbe à trois articulations</b> (Pl. 27).....	430
Données. — Efforts engendrés par la charge totale. — Demi-surcharge. — Efforts dus au vent. — Efforts maximums.	
§ 8. — <b>Ferme courbe à deux articulations sur les appuis</b> (Pl. 28).....	436
Données. — Charges verticales. — Efforts engendrés par le vent. — Influence des variations de température. — Comparaison du système avec celui des fermes à trois articulations.	

## CHAPITRE DIXIÈME

### CALCUL DES JOINTS DES POUTRES

§ 1. — <b>Considérations générales</b> .....	447
§ 2. — <b>Couvre-joints d'âmes</b> .....	449
§ 3. — <b>Couvre-joints de cornières</b> .....	450
§ 4. — <b>Joint des semelles</b> .....	453
Joint en escaliers. — Joint croisés. — Joint en escalier à double couvre-joint. — Joint croisés à double couvre-joint.	

## CHAPITRE ONZIÈME

### PILES EN MAÇONNERIE

§ 1. — <b>Considérations générales</b> .....	463
Section rectangulaire. — Section circulaire. — Effort de glissement. — Ligne de pression.	
§ 2. — <b>Calcul d'une pile de pont en arc</b> (Pl. 29).....	468
§ 3. — <b>Culée de pont en arc</b> (Pl. 29).....	470
§ 4. — <b>Piles de grande hauteur</b> (Pl. 30).....	472
§ 5. — <b>Calcul d'une tour de phare ou d'une cheminée en maçonnerie</b> .....	476

## CHAPITRE DOUZIÈME

### TABLES ET FORMULES

§ 1. — <b>Tables</b> .....	483
Tableau des sections de rivets ou boulons.....	
Tableau des sections des cornières à branches égales.....	
Tableau des poids des cornières à branches égales.....	
Tableaux des poids des fers plats.....	
Moments d'inertie des âmes d'une poutre.....	
Moments d'inertie de 4 cornières.....	
Moments d'inertie des semelles de 100mm de largeur.....	
Dimensions, sections, poids, moments d'inertie des cornières à branches égales.....	
Densité des principaux matériaux de construction.....	
Elasticité et résistance de quelques matériaux de construction.....	
Tableau des valeurs des coefficients de frottement.....	
Tableau des coefficients de dilatation linéaire.....	
§ 2. — <b>Formules</b> .....	508
Théorème des trois moments. — Moments sur piles pour 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 travées. — Formules empiriques de résistance au flambage des pièces chargées debout.....	
<b>Errata</b> .....	516

## PRÉFACE

---

L'emploi de la Statique graphique, dans les calculs de résistance des constructions, se répand de plus en plus. Cela suffit à prouver que cette science nouvelle présente, dans un grand nombre de cas, de réels avantages.

Nous avons pu, dans bien des occasions, comparer les méthodes graphiques aux méthodes analytiques, tant au point de vue de l'exactitude des résultats qu'elles fournissent, qu'au point de vue de la rapidité et de la simplicité des opérations. Le principal avantage de la statique graphique sur les calculs analytiques, c'est, il nous semble, de mettre sous les yeux, beaucoup mieux que des formules, les lois de la répartition des efforts ou des moments fléchissants. L'exactitude des épures n'est, il est vrai, pas aussi grande que celle du calcul qui permet, en prenant un nombre assez grand de décimales, de la pousser aussi loin qu'on le désire. Mais les hypothèses qui servent de point de départ à la résistance des matériaux, les données mêmes des calculs ne sont pas mathématiques, et il est tout à fait inutile de chercher une exactitude plus grande dans les résultats.

Le plus souvent les constructions graphiques sont plus rapides.

Nous sommes cependant bien éloignés de conclure de ce qui précède, comme le font beaucoup de partisans de la statique graphique, qu'elle peut toujours remplacer le calcul avec avantage. Suivant les cas c'est l'une ou l'autre des méthodes qui sera préférable, et souvent il conviendra de les combiner.

C'est dans l'étude des ponts et des charpentes que la statique graphique a été d'abord appliquée et qu'elle s'est développée. On ne s'étonnera donc pas de trouver ici un grand nombre d'exemples tirés de ces constructions.'

Les applications de la statique graphique que nous traitons dans ce volume concernent les poutres et les arcs des ponts, pleins ou à treillis, les piles métalliques et les fermes. Nous donnons aussi quelques applications aux piles en maçonnerie. Enfin, trois chapitres spéciaux sortent du cadre de la statique graphique ; mais il nous a paru qu'ils compléteraient utilement notre ouvrage, en donnant des renseignements pratiques dont les ingénieurs et les constructeurs ont fréquemment besoin. Ces chapitres sont : le premier, qui fait connaître les charges généralement admises en France, et traite des efforts développés par le vent et par les changements de température ; le dixième, consacré tout entier à l'étude des joints dans les poutres ; enfin le douzième, qui contient des tables de moments d'inertie et des tableaux divers, et rappelle un certain nombre de formules qui ne se trouvent pas ailleurs dans le volume, mais sont cependant très utiles dans les calculs sur la résistance des matériaux.

Les parties que nous avons laissées de côté sont les suivantes :



La répartition des forces intérieures dans les poutres pleines et les lignes des plus grands efforts :

Les ponts suspendus ;

La théorie des voûtes ;

Les murs de soutènement.

Chacun de ces sujets est très étendu et leur ensemble pourrait faire l'objet d'un volume spécial.

Remarquons cependant, en ce qui concerne les voûtes en maçonnerie, que si l'on a soin de leur donner des dimensions suffisantes pour faire disparaître tout effort de tension, on pourra leur appliquer la théorie de l'arc élastique ; nous renvoyons à ce qui est dit sur ce sujet dans le premier volume des *Ponts en Maçonnerie*, de E. Degrand et Jean Résal, Ch. II.

Nous présentons notre travail sous une forme et avec des divisions un peu différentes de celles que l'on adopte généralement. Un certain nombre d'exemples numériques de types variés ont été choisis de manière à donner les cas que l'on rencontre le plus souvent dans la pratique. Chaque exemple forme autant que possible un ensemble complet, afin d'éviter au lecteur d'avoir, pour suivre une épure, à chercher dans différentes parties du volume les explications nécessaires.

Cependant on n'a pas laissé de côté entièrement les développements théoriques, et le lecteur trouvera dans ce volume l'explication des méthodes nécessaires au tracé des épures de l'Atlas. Les parties les moins répandues, notamment en ce qui concerne la théorie des arcs, les poutres continues, leur résistance pendant le lançage, l'influence du vent, les déformations, sont traitées avec plus de détails que les autres.

Les planches ne sont pas une réduction d'épures d'exécution ; elles ont été faites aux échelles indiquées dans

l'Atlas dont le format ne comporte qu'une exactitude relative. Les échelles sont cependant suffisantes pour que l'on puisse suivre d'un bout à l'autre toutes les constructions graphiques. Nos exemples, souvent après plusieurs essais, ont été choisis de manière à se présenter convenablement, malgré les exigences du format. Chacune des planches a été traitée comme une véritable épure d'ingénieur-constructeur ; elle porte ses titres, ses sous-titres, ses données, avec les cotes nécessaires pour en faciliter la lecture.

Les livres que nous avons consultés sont les suivants :

*La statique graphique*, par M. Culmann ;

*Traité de statique graphique*, par M. Maurice Lévy ;

*Résistance des matériaux*, par M. Collignon ;

*Résistance des matériaux*, par M. Flamant.

*La ligne élastique et son application à la poutre continue*, par W. Ritter.

De plus, comme cela est indiqué dans le courant du volume, nous avons emprunté à M. W. Ritter, professeur et directeur de l'Ecole polytechnique de Zurich, une note sur les efforts secondaires parue dans la *Schweizerische Bauzeitung* et sa théorie de l'arc publiée en allemand sous le titre « der Elastische Bögen ». Les paragraphes 2 à 18 du Chapitre sixième sont la traduction de cette théorie : les planches correspondantes, 13 et 14, sont du même auteur.

Qu'on nous permette d'insister, en terminant, sur un point que nous croyons essentiel : c'est qu'on peut être conduit à de graves erreurs en se contentant d'appliquer mécaniquement une méthode au cas à traiter. Il est très-important que l'ingénieur se rende exactement compte

de la valeur et de l'exactitude des procédés divers, qu'il ne perde pas de vue les hypothèses ayant servi à les établir, et pour ce genre de recherches la Statique graphique est d'un grand secours. Pour citer un exemple nous avons souvent vu appliquer à des poutres courbes à treillis (bowstrings, etc.) la méthode des moments fléchissants et des efforts tranchants. Cette méthode, qui a été établie pour les poutres pleines et qui peut par extension s'employer dans le calcul des poutres droites à treillis, conduit à des résultats tout à fait faux lorsqu'il s'agit de poutres courbes à treillis. Il est à désirer qu'on laisse de côté entièrement dans les systèmes à treillis, chaque fois qu'on le pourra, les moments fléchissants, les efforts tranchants, les moments de résistance, pour ne considérer que les forces extérieures, les forces intérieures et les sections des pièces (voir Ch. troisième, § 1).

Disons encore, puisque nous cherchons à prémunir le lecteur contre les erreurs qu'une certaine inattention peut amener, qu'il faut toujours, dans l'établissement des projets, rechercher les dispositions propres à les mettre d'accord avec les hypothèses du calcul. On évitera autant que possible de désaxer les pièces, c'est-à-dire de faire passer la fibre moyenne à côté des nœuds. Si pour des raisons de construction on est conduit à s'écarter des hypothèses admises, il faut absolument se rendre compte de l'influence de ces écarts.

Ayant écrit principalement pour les ingénieurs-construteurs, nous aurons atteint notre but si, en contribuant à répandre l'application de la statique graphique, nous arrivons à faciliter leurs études.



## CHAPITRE PREMIER

---

### CHARGES DES PONTS

ET DES

### CHARPENTES MÉTALLIQUES

- § 1. *Charges des ponts de chemins de fer*
- § 2. *Charges des ponts pour route*
- § 3. *Action du vent*
- § 4. *Influence de la température*
- § 5. *Charges des charpentes métalliques*





## CHAPITRE PREMIER

# PTS ET DES CHARPENTES MÉTALLIQUES

### § 1

## DES PONTS DE CHEMINS DE FER

Le composant du poids de la construction  
de la voie et de la surcharge.

Les surcharges imposées par l'Administra-  
tion ministérielle du 9 juillet 1877, sont les

Ponts à travées métalliques qui portent des voies de  
stat de livrer passage à toutes les machines et à tous  
circuler sur le réseau auquel ils appartiennent  
Dimensions des pièces métalliques des travées seront  
telles que, dans la position la plus défavorable des sur-  
charges, le travail du métal par  
section soit limité, savoir :

et demi pour la fonte travaillant à l'extension di-

mes pour la fonte travaillant à l'extension dans une

mes pour la fonte travaillant à la compression, soit  
dans une pièce fléchie ;

mes pour le fer forgé ou laminé tant à l'extension qu'à

l'Administration se réserve d'admettre des limites plus  
hautes, lorsque des justifications suffisantes seront  
fournies sur les qualités des matières, les formes et les dis-

#### 4 CHAPITRE I — CHARGES DES PONTS ET DES CHARPENTES

Art. 3. — Les auteurs des projets de travées métalliques devront justifier, par des calculs suffisamment détaillés, qu'ils se sont conformés aux prescriptions de l'article précédent.

En ce qui concerne les fermes longitudinales, ils pourront admettre l'hypothèse de surcharges uniformément réparties. Dans ce cas ces surcharges, par mètre courant de simple voie, seront réglées conformément au tableau suivant :

Portée des travées	Surcharge uniforme	Portée des travées	Surcharge uniforme	Portée des travées	Surcharge uniforme
mètres	kilogrammes	mètres	kilogrammes	mètres	kilogrammes
2	12000	14	5900	50	3900
3	10500	15	5700	55	3800
4	10200	16	5500	60	3700
5	9800	17	5400	70	3500
6	9500	18	5200	80	3400
7	8900	19	5100	90	3300
8	8300	20	4900	100	3200
9	7800	25	4500	125	3100
10	7300	30	4300	150	3000
11	6900	35	4200	et au-delà	
12	6500	40	4100		
13	6200	45	4000		

*Nota.* — Les surcharges correspondant à des portées intermédiaires à celles qui sont indiquées ci-dessus seront déterminées par voie d'interpolation.

Les dimensions des pièces qui ne font pas partie des fermes longitudinales, et notamment de celles des pièces de pont, seront calculées d'après les plus grands efforts qu'elles peuvent avoir à supporter.

Les dimensions et les charges des plus lourdes locomotives des compagnies de chemins de fer en France sont les suivantes :

Est

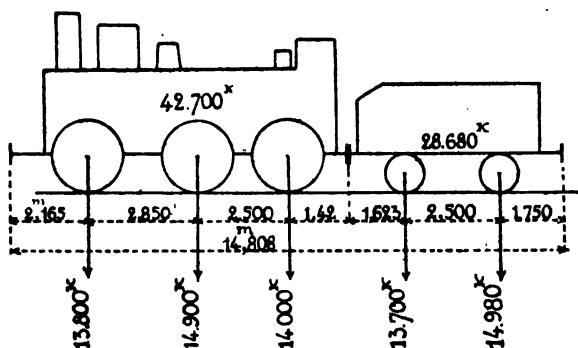


Fig. 1.

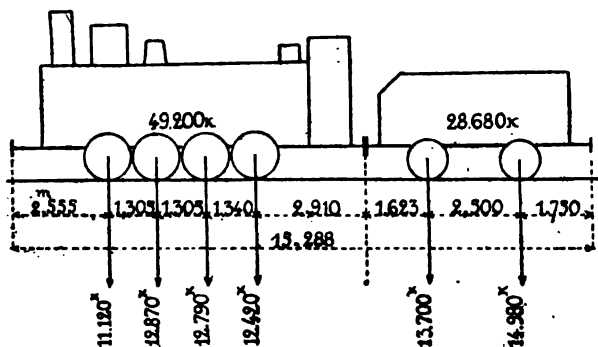


Fig. 2.

Etat

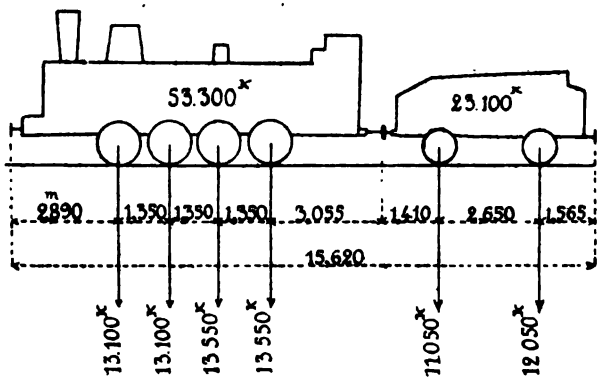


Fig. 3.

## 6 CHAPITRE I — CHARGES DES PONTS ET DES CHARPENTES

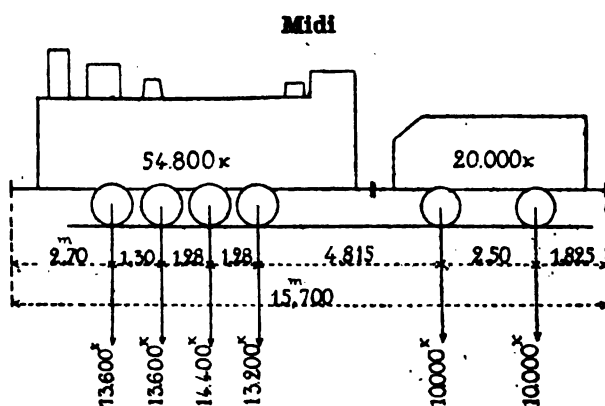


Fig. 4.

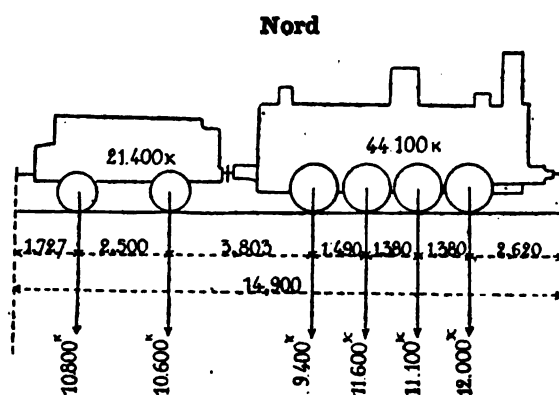


Fig. 5.

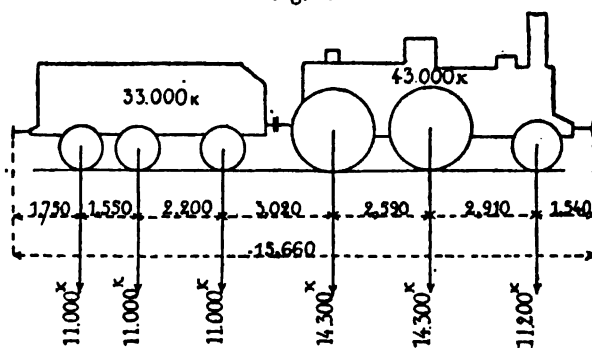


Fig. 6.

Orléans

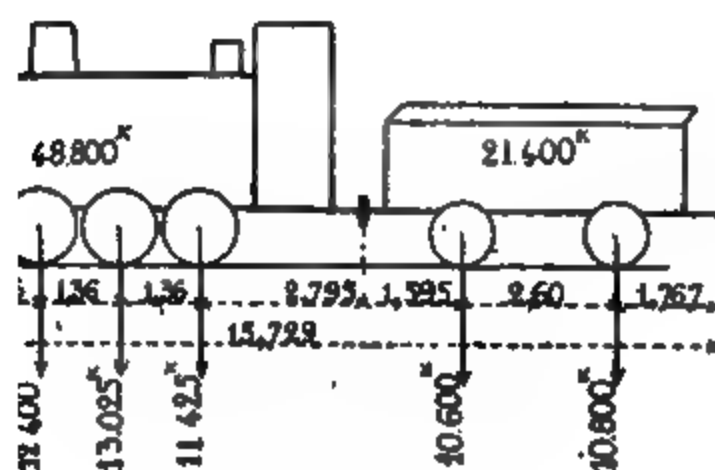


Fig. 7.

Ouest

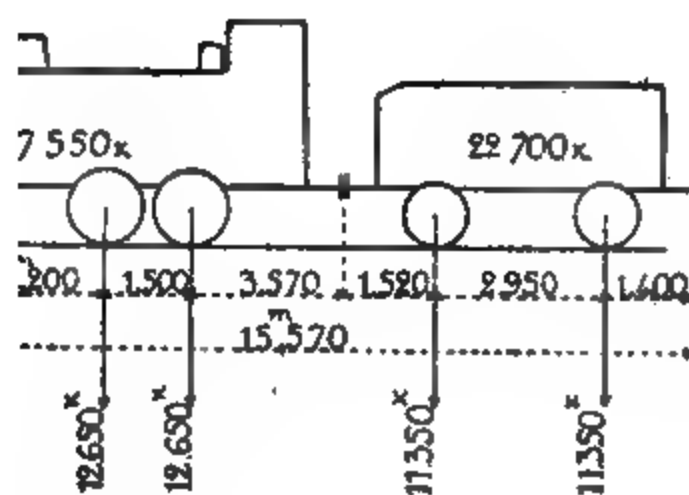


Fig. 8.

Paris-Lyon-Méditerranée

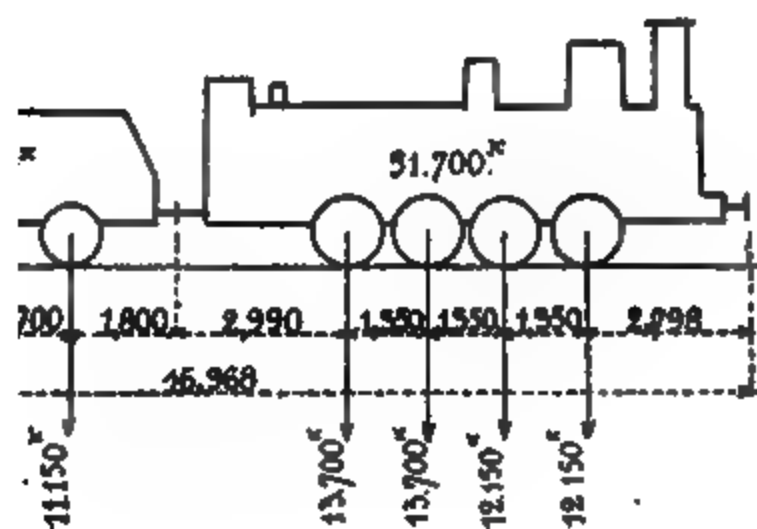


Fig. 9.

## 8 CHAPITRE I — CHARGES DES PONTS ET DES CHARPENTES

**Voie.** — Les poids de la voie au mètre courant sont les suivants :

Voie sur traverses espacées de 0 <sup>m</sup> ,7.....	190 kil.
Voie sur longrines.....	160
Platelage de 8 <sup>cm</sup> d'épaisseur.....	300

### Poids des Ponts en fer au mètre courant

**Poids du tablier métallique.** — Le poids des ponts en fer est très variable ; il dépend à la fois du système de construction, de la hauteur des poutres et des dispositions des pièces de pont. Les poids que nous donnons dans le tableau ci-dessous

Portée	PONTS A UNE VOIE		PONTS A DEUX VOIES
	Moyen	Minimum	Poids moyens
4,00	600k.	350k.	1020k.
5,00	650	370	1170
6,00	670	400	1220
7,00	700	420	1280
8,00	725	440	1320
9,00	750	460	1380
10,00	775	480	1420
12,00	850	520	1550
14,00	925	570	1670
16,00	980	620	1790
18,00	1050	680	1910
20,00	1110	720	2030
25,00	1300	840	2370
30,00	1480	970	2700
35,00	1680	1100	3070
40,00	1880	1220	3430
45,00	2100	1400	3820
50,00	2300	1580	4200
60,00	2750	2100	5000
70,00	3200	2540	5800
80,00	3650	3000	6700
90,00	4150	3500	7500
100,00	4600	3900	8400

ne peuvent donc être considérés que comme des poids approximatifs. Ils s'appliquent à des travées discontinues ; dans les ponts à poutres continues on pourra se servir des mêmes tableaux en prenant les poids correspondant à des portées réduites dans les rapports qui suivent :

0,85 l dans le cas d'un grand nombre de travées,  
0,90 l dans le cas de deux travées continues.

Les poids du tableau ne comprennent pas de plancher en fer.

## § 2

## CHARGES DES PONTS POUR ROUTES

Les charges se composent du poids de la construction métallique, du poids du plancher et de la surcharge.

*Surcharges.* — Nous donnons d'abord les surcharges qui sont imposées par l'Administration dans la circulaire ministérielle du 9 juillet 1877. Ce qui suit est un extrait de cette circulaire.

Article 1<sup>er</sup>. — Les ponts à travées métalliques dépendant des voies de terre devront être en état de livrer passage à toute voiture dont la circulation est autorisée par le règlement du 10 août 1852 sur la police du roulage et des messageries, c'est-à-dire aux voitures attelées, au maximum, de cinq chevaux si elles sont à deux roues, et de huit chevaux si elles sont à quatre roues.

Article 2. — Les dimensions des pièces métalliques des travées seront calculées de telle sorte que, dans la position la plus défavorable des surcharges que l'ouvrage peut avoir à supporter, et notamment sous l'action des épreuves prescrites par l'article 3, le travail du métal par millimètre carré de section soit limité :

A un kilogramme et demi pour la fonte travaillant à l'extension directe ;

A trois kilogrammes pour la fonte travaillant à l'extension dans une pièce fléchie ;

A cinq kilogrammes pour la fonte travaillant à la compression soit directement, soit dans une pièce fléchie ;

A six kilogrammes pour le fer forgé ou laminé, tant à l'extension qu'à la compression.

Toutefois, l'Administration se réserve d'admettre des limites plus élevées pour les grands ponts, lorsque des justifications suffisantes seront produites en ce qui touche les qualités des matières, les formes et les dispositions des pièces.

Article 3. — Dans les calculs de stabilité des travées, on admettra que



## 10 CHAPITRE I — CHARGES DES PONTS ET DES CHARPENTES

le poids des plus lourdes voitures, véhicule et chargement, s'élève à 11 tonnes si elles sont à deux roues et à 16 tonnes si elles sont à quatre roues, l'écartement des essieux étant d'ailleurs fixé pour ces dernières à trois mètres. Dans les localités où ces poids seraient exagérés, ils pourront être réduits eu égard aux circonstances locales, sans que, dans aucun cas, le poids du véhicule et de son chargement puisse être inférieur à 6 tonnes pour les voitures à deux roues et 8 tonnes pour les voitures à quatre roues, sur les routes soumises à la police du roulage.

En ce qui concerne le calcul des fermes longitudinales, on admettra, pour la voie charretière, celle des deux combinaisons de poids suivantes qui fera subir à ces fermes la plus grande fatigue eu égard à leur portée, savoir : une surcharge uniformément répartie et évaluée à raison de 300 kilogrammes par mètre carré, ou bien une surcharge composée d'autant de voitures ayant les poids ci-dessus déterminés que le tablier pourra en contenir, avec leurs attelages, sur le nombre de files que comporte la largeur de la voie. On fera, d'ailleurs, le choix entre les voitures à deux roues ou à quatre roues, de manière à obtenir le plus grand travail du métal, et l'on supposera qu'une file de voitures occupe une zone de 2 m. 50 de largeur.

Dans les deux cas, les trottoirs seront censés porter une surcharge de 300 kilogrammes par mètre carré.

Les dimensions des pièces qui ne font point partie des fermes longitudinales, notamment celles des pièces de pont, seront calculées d'après les plus grands efforts qu'elles pourront avoir à supporter.

Les fig. 10 et 11 représentent la disposition des voitures de 16.000 kilogrammes et de 11.000 kilogrammes avec leurs attelages. Cette disposition est celle qui est donnée par M. Kleitz dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, page 551, 2<sup>e</sup> semestre de 1877.

Les fig. 12 et 13 donnent la disposition des voitures de 8.000 kilogrammes et 6.000 kilogrammes admises dans les calculs des ponts du service vicinal.

L'écartement des roues d'un même essieu pour ces dernières voitures est de 1<sup>m</sup>,60, et la distance des roues voisines de deux voitures marchant de front est de 0<sup>m</sup>,60.

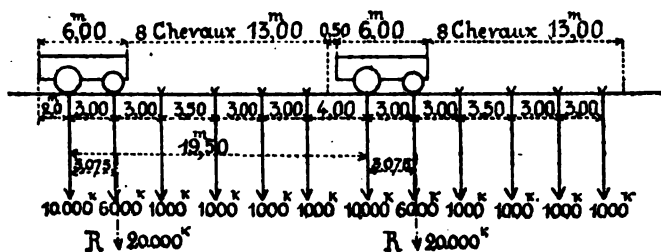


Fig. 10.

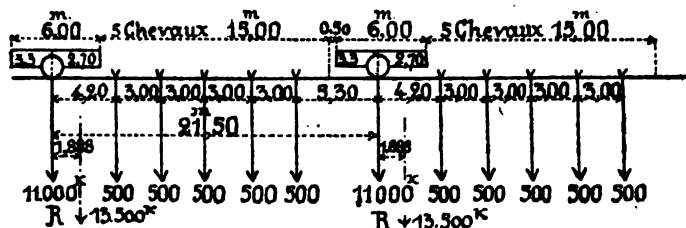


Fig. 11.

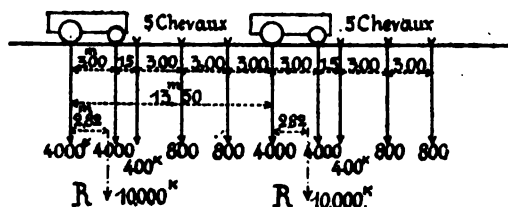


Fig. 12.

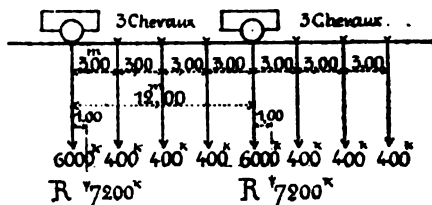


Fig. 13.

Nous avons indiqué sur les figures la position de la résultante des poids d'une voiture et de son attelage.

Il résulte de la circulaire que, dans le calcul des poutres, on aura à considérer deux hypothèses : celle d'une charge roulante et celle d'une charge uniformément répartie, et que l'on

## 12 CHAPITRE I — CHARGES DES PONTS ET DES CHARPENTES

choisira celle des deux qui donnera les plus grands efforts. Pour faciliter ce choix, nous donnons au tableau suivant, dans huit colonnes, pour des portées inférieures à 80 mètres, les charges mortes par mètre courant équivalent aux charges roulantes données ci-dessus.

Dans une colonne on trouve la charge morte qui donne le même moment fléchissant que la charge roulante, et dans l'autre la charge morte qui produit le même effort tranchant maximum que la charge roulante.

Les colonnes 1 et 3 sont tirées du mémoire de M. Kleitz, et nous les avons complétées par les autres.

**Tableau des poids morts équivalent aux charges roulantes**

Char de 11 tonnes		Char de 16 tonnes		Char de 6 tonnes		Char de 8 tonnes	
Charge au mètre courant correspondant à la charge roulante pour le moment maximum	it	Charge au mètre courant correspondant à la charge roulante pour le moment maximum			Charge au mètre courant correspondant à la charge roulante pour l'effort tranchant	Charge au mètre courant correspondant à la charge roulante pour le moment maximum	Charge au mètre courant correspondant à la charge roulante pour l'effort tranchant
1	2	3	4	5	6	7	8
k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.
5500	<del>5500</del>	5210	5750	3000	3050	<del>2050</del>	2500
4400	4430	4350	4960	2400	2460	1660	2260
3670	3720	3760	4330	2000	2070	1530	<del>2000</del>
3150	3200	3370	3880	1750	1800	1450	1840
2750	2820	3050	<del>3500</del>	1560	1590	1370	<del>1680</del>

ls du plancher peut très facilement se commencer les calculs de résistance, dès positions du pont ; mais il est trop nuisse en fixer exactement les poids parlant quelques indications approxima-

	Poids au mètre carré
une 0-20.....	300 kil.
11 d'épaisseur avec remplissage de 2cm.....	400
22 d'épaisseur avec remplissage de 2cm.....	650
.....	60
ou embouties de 8 <sup>m</sup> d'épaisseur	75

allique. — Le poids de la partie métall-riable encore que celui des ponts de que nous donnons dans les tableaux moyens destinés à servir d'indication istance dans les projets de ponts. Les au correspondent aux ponts pour le 46.000 kilogrammes et de 44.000 kilo-uxième tableau aux ponts plus légers ilogrammes et de 6.000 kilogrammes.

# 14 CHAPITRE 1 — CHARGES DES PONTS ET DES CHARPENTES

## Ponts pour voitures de 16.000 kilos et 11.000 kilos Poids moyen du métal.

Portée	Ponts à chaussée empierrée sur voûtes en briques ou plancher métallique				Ponts à platelage en bois			
	Ponts à 2 voies largeur totale 7 <sup>m</sup> .		Ponts à une voie largeur totale 4 <sup>m</sup> .		Ponts à 2 voies largeur totale 7 <sup>m</sup> .		Ponts à une voie largeur totale 4 <sup>m</sup> .	
	Poids au mètre courant	Poids au mètre carré	Poids au mètre courant	Poids au mètre carré	Poids au mètre courant	Poids au mètre carré	Poids au mètre courant	Poids au mètre carré
	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.
5	1078	154	640	160	840	120	500	125
6	1113	159	660	165	861	123	512	128
8	1183	169	700	175	924	132	548	137
10	1260	180	740	185	980	140	580	145
12	1337	191	788	197	1043	149	616	154
15	1449	207	856	214	1130	160	664	166
20	1631	233	964	241	1281	183	760	190
25	1813	259	1076	269	1456	208	864	216
30	2002	286	1196	299	1621	231	976	244
35	2191	313	1316	329	1806	258	1080	270
40	2394	342	1436	359	1981	283	1180	295
45	2590	370	1560	390	2163	309	1300	325
50	2800	400	1700	425	2352	336	1420	355
55	3024	432	1848	462	2555	365	1580	395
60	3227	461	2008	502	2765	395	1720	430
65	3486	498	2200	550	2978	425	1880	470
70	3710	530	2400	600	3185	455	2050	512
75	3955	565	2620	655	3395	485	2230	557
80	4200	600	2852	713	3605	515	2420	605

Ces poids ne comprennent pas le plancher métallique.

## roitures de 6.000 kilos et 8.000 kilos

Poids moyen du métal.

Poutres en maçonnerie sur voûtes en maçonnerie ou ponts métalliques		Ponts à platelage en bois			
Ponts à une voie largeur totale 3 <sup>m</sup> 80		Ponts à 2 voies largeur totale 6 <sup>m</sup>		Ponts à une voie largeur totale 3 <sup>m</sup> 80	
Poids au mètre courant	Poids au mètre carré	Poids au mètre courant	Poids au mètre carré	Poids au mètre courant	Poids au mètre carré
k.	k.	k.	k.	k.	k.
532	140	516	86	342	90
548	144	540	90	357	94
580	152	588	98	388	102
610	161	636	106	418	110
640	168	684	114	438	118
685	180	750	125	494	130
780	205	870	145	570	150
880	232	990	165	654	172
1000	263	1110	185	737	194
1100	290	1266	211	843	222
1215	320	1422	237	958	252
1340	353	1602	267	1080	285
1480	389	1740	290	1197	315
1630	429	1950	325	1349	355
1800	474	2142	357	1500	395
1980	516	2340	390	1653	435
2120	558	2550	425	1805	475
2280	600	2760	460	1976	520
2480	653	2970	495	2130	560

ne tenant pas le plancher métallique.

Les tableaux sont établis pour des travées indé-

finies. Pour les ponts à poutres continues, on pourra se servir des poids ci-dessus en prenant les poids correspondant à des travées de 10 mètres dans les rapports qui suivent :

- 1<sup>er</sup> cas : le cas d'un grand nombre de travées ;
- 2<sup>e</sup> cas : le cas de deux travées continues.

## § 3

## ACTION DU VENT

Pour tenir compte de l'action du vent sur les tabliers métalliques, on fait diverses hypothèses plus ou moins exactes sur la manière dont le vent agit contre les parois rencontrées. L'hypothèse qui nous semble la plus rationnelle est celle qui est maintenant adoptée en Angleterre.

On admet que la première paroi est entièrement frappée par le vent et que les autres parois sont aussi frappées entièrement, mais par un vent dont l'intensité est diminuée dans le rapport des vides aux pleins de la paroi précédente.

On admet généralement un vent de 270 kilogrammes par mètre carré quand le pont ne porte aucune surcharge et un vent de 150 kilogrammes quand le pont est chargé.

On trouvera plus loin dans le calcul des contreventements l'application de cette hypothèse sur les efforts du vent.

Si l'on suppose, comme exemple, deux parois à treillis et si l'on désigne par  $F$  la surface totale de la première paroi, par  $F_v$  la surface des vides de cette même paroi, par  $F'$  et  $F'_v$  les mêmes surfaces de la deuxième paroi, l'effort total d'un vent agissant avec une intensité  $t$  par mètre carré sera pour l'ensemble des deux poutres :

$$T = t \left[ (F - F_v) + (F' - F'_v) \frac{F_v}{F} \right]$$

Pour trois parois on aurait

$$T = t \left[ (F - F_v) + (F' - F'_v) \frac{F_v}{F} + (F'' - F''_v) \frac{F_v}{F} \cdot \frac{F'_v}{F'} \right]$$

et ainsi de suite.

§ 4

EFFECTS DE LA TEMPÉRATURE

Les variations de température ont pour effet de modifier les dimensions des corps. Lorsque la variation de température est uniforme sur toutes les parties d'une construction, et que la construction est libre de se déformer sans obstacles, elle reste, dans sa forme, semblable à elle-même; il n'y a pas de contraintes dans les pièces ne subissant pas d'efforts dus à ces variations.

En pratique, on a soin de disposer des appuis de manière à empêcher la déformation, en n'opposant qu'une résistance négligeable.

Ainsi, une variation de 30° au-dessous et au-dessus de la température moyenne.

Donne pour l'unité de longueur de fer

0<sup>m</sup>,000012 pour un degré

soit pour  $\pm 30^\circ$

$$\pm 0^m,00036$$

La variation de longueur de l'unité de longueur d'une pièce soumise à un effort de 1 kilogramme par millimètre carré est en comptant un coefficient d'élasticité  $E = 16 \times 10^9$ .

$$\frac{1.000.000}{16.000.000.000} = 0,000062$$

En supposant qu'une poutre se trouve maintenue à ses extrémités et dans l'impossibilité de changer de longueur sous l'influence de la température, on aurait, pour un changement de 30° de température, un travail de la pièce de

$$\frac{0,00036}{0,000062} = 6 \text{ kil. par millimètre carré environ.}$$



Dans les poutres courbes ou arcs, les appuis sont fixes et les changements de température sont un élément important des calculs de résistance, comme on le verra dans la suite.

## § 5

### CHARGES DES CHARPENTES MÉTALLIQUES

Les charges que portent les charpentes se décomposent en trois :

- a). Le poids propre de la construction ;
- b). La couverture ;
- c). Les surcharges.

Le poids propre dépend à la fois du mode de couverture qui est plus ou moins pesant, des surcharges qui sont variables avec les climats et enfin de la disposition de la construction elle-même. Il serait facile de tenir compte des deux dernières charges dans l'évaluation du poids propre, si ce dernier ne dépendait pas en même temps, dans une large mesure, des dispositions de la construction, de l'écartement et de la portée des fermes, ainsi que de la composition des différentes parties constitutives. Les poids que nous donnons sont des poids moyens qui pourront servir à un premier calcul et que l'on rectifiera ensuite s'il y a lieu.

La couverture éprouve aussi de grandes variations de poids suivant son épaisseur et sa composition, mais elle est en général une donnée du problème. Les poids que nous donnons sont ceux des couvertures les plus usitées et nous avons indiqué à côté de chaque poids les dimensions auxquelles il correspond.

Enfin, la surcharge que l'on admet varie comme nous l'avons dit avec les climats, elle est une fonction de la quantité de neige que les toitures ont à porter et de l'intensité des vents qui agissent dans la localité.

a). Poids propre de l'ossature métallique.

Nous résumons ces poids dans le tableau suivant : ils supposent un travail du métal de 8 kilogrammes par millimètre carré. Si le coefficient de travail adopté était différent, les poids du tableau seraient à multiplier par le rapport inverse des coefficients.

Poids du métal au mètre carré de surface couverte horizontalement

Désignation des pièces constitutives	Couvertures en tuiles à emboîtement de 50 kil. au mètre carré	Zinc sur voliges de 36 kil. au mètre carré	Toles ondulées de 1 <sup>er</sup> d'épaisseur	Ardoise sur voliges de 50 kilos au mètre carré
	k.	k.	k.	k.
Fermes.....	12,0	11	10	12
Pannes.....	9,5	9	9	10
Chevrans....	8	»	»	8
Lattis.....	10	»	»	»
Contreventement..	2	2	2	2
Poids totaux au mètre carré	41,5	22	21	32

Ces poids ne comprennent pas les cheneaux, les piliers et les parties de la construction qui ne sont pas portées par les fermes.  
Les poids indiqués dans le tableau pour les fermes supposent des portées de 10 à 20 mètres, qui sont les plus usitées.

b). Poids de la couverture.

*Couverture en tuile à emboîtement* (Muller, Montchanin). — Les poids au mètre carré de projection horizontale pour les différentes inclinaisons sont les suivants :

Inclinaisons.....	0,00	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
Poids correspondants .	45k	46k,5	47k	48k,5	50k,5	52k,5

*Couverture en zinc sur voliges.* — Le zinc est du n° 14 de 0<sup>mm</sup>,87 d'épaisseur sur frises de 34<sup>mm</sup> d'épaisseur.

## CHAPITRE I — CHARGES DES PONTS ET DES CHARPENTES

épaisseurs.....	0,00	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
correspondant au						
mètre carré de pro-						
jection horizontale..	33k,5	34k	35k	36k	37k	38k,5

### ouverture en tôles ondulées.



épaisseurs.....	0,00	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
correspondant au						
mètre carré de pro-						
jection horizontale..	17k	17k,3	17k,7	18k,3	18k,9	20k

*ardoises sur voliges.* — Ardoises de 38 kilogrammes au mètre carré sur voliges de 25<sup>mm</sup>.

épaisseurs.....	0,00	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
correspondant au						
mètre carré de pro-						
jection horizontale..	45k	46k,5	47	48k,5	50k,5	52k,5

### c). Surcharges.

*neige.* — On compte généralement pour la neige 100 kilogrammes par mètre d'épaisseur ; on aura donc pour les épaisseurs suivantes les poids au mètre carré donnés ci-dessous :

épaisseur de neige.....	0,25	0,50	0,75	1,00
charge par mètre carré .....	25k	50k	75k	100k

*vent.* — Si l'on admet que le vent souffle horizontalement avec une intensité  $p$  par mètre carré et si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle d'inclinaison de la toiture, la pression verticale  $V$  par mètre carré de projection horizontale sera

$$V = p \sin^2 \alpha$$

le effort horizontal par mètre carré de projection verticale sera aussi

$$H = p \sin^2 \alpha$$

sité de 200 kilogrammes au mètre  
t calculés dans le tableau suivant  
de 0 à 0,60.

0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
0,0385	0,0828	0,1379	0,2000	0,2647
8k	17k	27k	40k	53k

es charpentes est de 0<sup>m</sup>,400 ; pour  
vertical est de 27 kilogrammes par  
e le tableau.

ettre, en général, une épaisseur  
oit 25 kilogrammes de surcharge.  
ent un maximum de surcharge de  
ogrammes, on aura à compter une  
50 kilogrammes par mètre carré.  
urcharges ne peuvent se produire  
le compter sur une surcharge de  
carré de surface horizontale.

un tableau extrait de Claudel. Il  
les vitesses et les efforts corres-

Vitesse par seconde.	Pression par mètre carré.
15 <sup>m</sup>	30k,47
20	54k,16
24	78k,00
30,05	122k,28
36,45	176k,96
45,30	277k,87

s que le vent agit dans une direc-  
l'horizontale. Si l'on désigne par  
effort P du vent, angle que l'on  
l'effort normal N sur la surface

$$\sin (\alpha + \beta)$$

et par unité de surface inclinée l'effort normal  $p_n$  sera

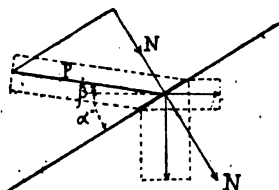


Fig. 14.

$$p_n = p \sin^2 (\alpha + \beta)$$

Les composantes verticales et horizontales donnent aussi toutes les deux un effort égal à

$$p_h = p_v = p \sin^2 (\alpha + \beta)$$

cet effort étant à compter par unité de surface verticale ou horizontale.

Quelques ouvrages donnent pour ces composantes du vent des valeurs différentes, mais nous les considérons comme le résultat d'une erreur de décomposition de force. Le vent qui frappe une surface ne donne qu'un effort normal à cette surface, la composante parallèle à cette surface est nulle si l'on néglige le frottement très faible du vent. Celui-ci s'échappe parallèlement à la surface avec une force vive perdue.

La composante normale est comme nous l'avons dit par unité de surface

$$p_n = p \sin^2 (\alpha + \beta)$$

Cette intensité du vent frappant obliquement une surface correspond très exactement aux résultats de l'expérience, et elle doit servir de point de départ à la détermination des efforts verticaux et horizontaux dans les constructions.

## CHAPITRE DEUXIÈME

---

### POUTRES A PAROIS PLEINES

**§ 1. Construction du polygone des forces, du polygone funiculaire, des moments fléchissants, des efforts tranchants et de la ligne élastique**

**§ 2. Poutres en porte-à-faux**

- I. Charges uniformément réparties
- II. Charges concentrées
- III. Construction des moments fléchissants et des efforts tranchants, Planche 1
- IV. Déformation de la poutre
- V. Déformation d'une poutre dans le cas d'une section constante

**§ 3. Poutres droites reposant librement sur deux appuis**

- I. Charges uniformément réparties
- II. Charges roulantes
- III. Cas où la surcharge porte par l'intermédiaire de poutrelles transversales
- IV. Exemple de construction des moments fléchissants, des efforts tranchants et des déformations verticales, Planche 2
- V. Déformation dans le cas d'une section constante

**§ 4. Poutre reposant sur deux appuis : encastrée sur l'un, libre sur l'autre**

- I. Détermination des moments fléchissants, des efforts tranchants et des déformations
- II. Exemple de construction des moments fléchissants et des efforts tranchants, Planche 2
- III. Poutre à section constante, encastrée à une extrémité et libre à l'autre, sans porte-à-faux

**5. Poutre reposant sur deux appuis et se prolongeant en porte-à-faux  
art et d'autre**

**I. Moments fléchissants et efforts tranchants**

**II. Construction graphique des moments fléchissants et des efforts  
tranchants**

**6. Poutre reposant sur deux appuis et encastree à ses deux extrémités**

**I. Moments fléchissants et efforts tranchants**

**II. Exemple de construction des moments fléchissants, des efforts  
tranchants et des déformations verticales d'une poutre encastree à  
ses deux extrémités, Planche 3**

**III. Poutre à section constante**

**7. Moment de résistance et moment d'inertie d'une poutre**

**8. Calcul des rivets dans une poutre à paroi pleine soumise à la  
on**

## CHAPITRE DEUXIÈME

### TRES A PAROIS PLEINES

#### § 4

#### DU POLYGONE DES FORCES, DU POLY- CULAIRE, DES MOMENTS FLÉCHIS- EFFORTS TRANCHANTS ET DE LA IQUE

échissants et les efforts tranchants corres-  
rges données s'obtiennent par le tracé de  
*polygone des forces* et le *polygone funicu-*

ces. — Le polygone des forces se construit  
e verticale, dans l'ordre qu'elles occupent,  
portionnelles aux charges considérées 1, 2,  
en joignant ensuite par des rayons un point  
ilé *pôle* aux extrémités des longueurs repré-  
La distance  $h$  du pôle  $O$ , à la verticale des  
*distance polaire*.

*laire*. — Le polygone funiculaire se trace à  
des forces, il a ses côtés parallèles aux  
er et ses sommets se trouvent sur les verti-  
Deux quelconques de ses côtés consécutifs  
la force  $n^{\text{me}}$  sont parallèles aux deux rayons  
ur la verticale dans le polygone des forces

*ants*. — Quel que soit le mode d'appui d'une  
se pas sur plus de deux appuis, les moments



fléchissants engendrés par le système des charges considérées seront représentés par les ordonnées verticales du polygone funiculaire. Mais la position de la ligne à partir de laquelle les ordonnées sont à mesurer, appelée *ligne de fermeture du polygone funiculaire*, dépend du mode d'appui.

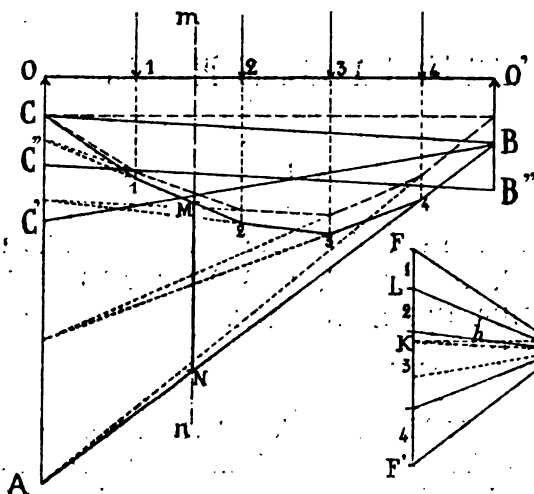


Fig. 15.

Pour une poutre  $OO'$  encastree au point  $O$  et libre à l'autre extrémité, les ordonnées sont à mesurer à partir de la ligne  $AB$  dernier côté du polygone funiculaire ; et dans une section  $mn$ , par exemple, le moment fléchissant dans la poutre sera représenté par la longueur  $MN$ .

Dans le cas d'une poutre reposant librement à ses deux extrémités sur deux appuis  $O$  et  $O'$ , les ordonnées sont à mesurer à partir de la ligne  $CB$  obtenue en joignant entre eux les points d'intersection des verticales des appuis avec le polygone funiculaire.

Si la même poutre est encastree sur l'un des appuis,  $O$  par exemple, le point  $C$  se déplace d'une quantité  $CC'$  égale au moment d'encastrement sur l'appui et la ligne à partir de laquelle on mesure les ordonnées est la ligne  $C'B$ .

Enfin, s'il y a encastrement sur les deux appuis le point  $C$  se déplace en  $C''$  et le point  $B$  en  $B''$ .  $CC''$  et  $BB''$  représentent

les moments d'encastrement sur les appuis et les ordonnées se mesurent à partir de la ligne  $C''B''$ .

Pour convertir les ordonnées du polygone funiculaire en moments, il suffit de les mesurer à l'échelle des forces et de les multiplier par la distance polaire  $h$ .

Lorsque les charges ne sont pas concentrées, c'est-à-dire appliquées en des points, mais réparties sur la longueur des poutres, on divisera la charge en petits éléments et on concentrera ces éléments en leur centre de gravité. La ligne représentative des moments, qui est en réalité dans ce cas une courbe, se trouvera remplacée par un polygone enveloppe de cette courbe et tangent à cette courbe aux points qui correspondent aux divisions des éléments (voir fig. 16).

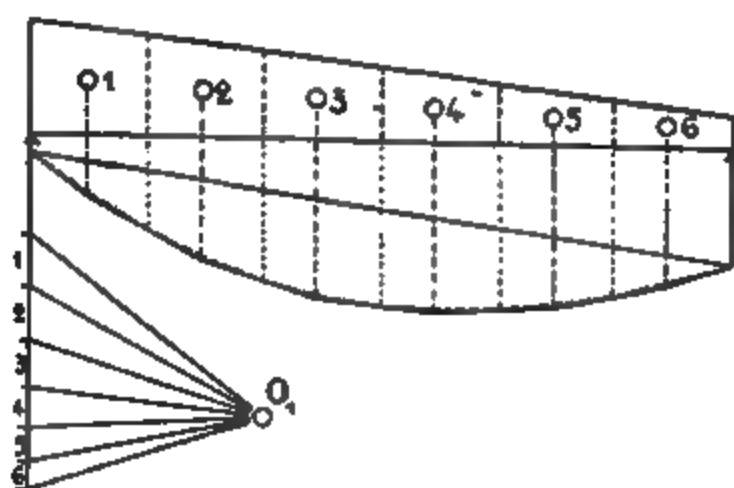


Fig. 16.

*Réactions sur les appuis.* — Les réactions des appuis s'obtiennent en menant (fig. 15), dans le polygone des forces, par le pôle  $O_1$  un rayon  $O_1K$  parallèle à la ligne de fermeture  $CB$  du polygone funiculaire. Ce rayon divise la somme des charges  $FF'$  en deux segments  $FK$  et  $KF'$  qui représentent les réactions, savoir  $FK$  la réaction à gauche,  $KF'$  la réaction à droite.

*Efforts tranchants.* — L'effort tranchant, en une section quelconque  $mn$  de la poutre (fig. 15), est égal à  $KL$  dans le polygone des forces, c'est-à-dire égal à la force interceptée sur la verticale des forces entre les deux rayons parallèles l'un au côté du polygone funiculaire coupé par la section  $mn$ , l'autre à la ligne de fermeture.

## CHAPITRE II — POUTRES A PAROIS PLEINES

*Surface des moments.* — On désigne par *surface des moments* l'urface comprise entre le polygone funiculaire et sa ligne fermeture.

*Ligne élastique.* — La ligne élastique ou la fibre moyenne de la poutre déformée s'obtient en divisant la surface des moments en éléments, en concentrant ces éléments comme des masses en leur centre de gravité et en traçant le polygone funiculaire correspondant à ces forces.

Si l'on prend pour tracer ce polygone funiculaire une distance polaire égale à  $EI$ , produit du moment d'inertie de la section de la poutre par le coefficient d'élasticité, le polygone funiculaire ainsi obtenu enveloppe la ligne élastique. Les points de tangence du polygone à la ligne élastique correspondent aux points de division des éléments.

Si l'on ne s'agit d'obtenir la déformation verticale qu'en un point déterminé, les éléments composant la surface des moments pourront être aussi grands que l'on voudra, il suffit qu'il y ait une division au point considéré.

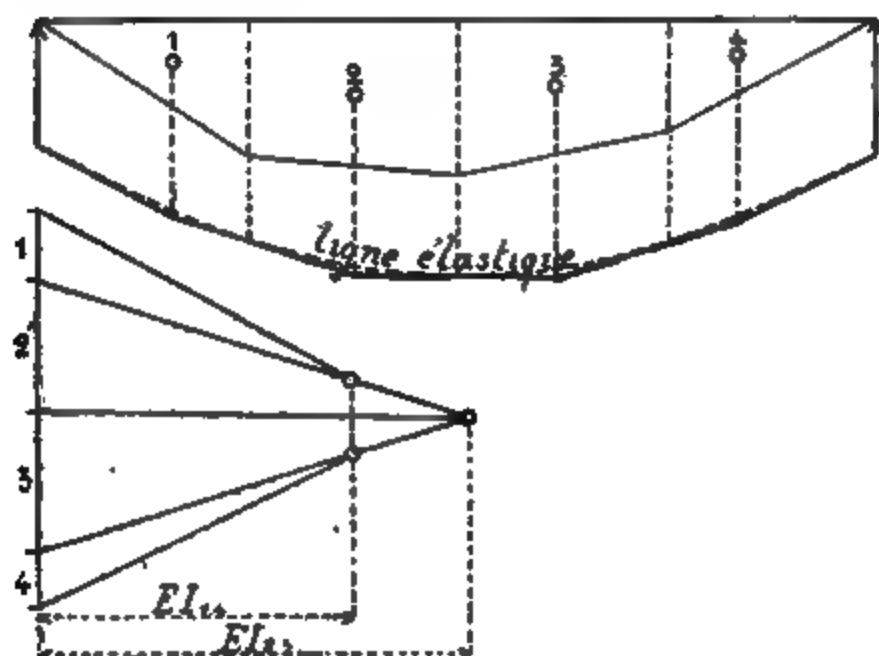


Fig. 17.

La fig. 17 donne un tracé de ligne élastique. On remarquera que le pôle qui est situé à une distance  $EI$  de la verticale se place chaque fois que la section de la poutre change d'un moment à l'autre.

Lorsque l'on choisit une hauteur quelconque, la ligne qui n'est, en fait, que la plus commode de toutes, est souvent concubinaire.

manières, soit en fait, soit directes.

par le point K une ligne sur cette horizon-

3 côtés du polygone  
1 trace le nouveau  
passer ses côtés par

## AUX

parties

1 représentative des  
2 charge uniformément  
3 outre est une para-  
4 C, extrémité de la  
5 même point.  
6 point d'encastrement

conque, situé à une  
égal à :

## CHAPITRE II — POUTRES A PAROIS PLEINES

$p$  est la charge uniformément répartie par unité de longueur.

$l$  est la longueur de la poutre.

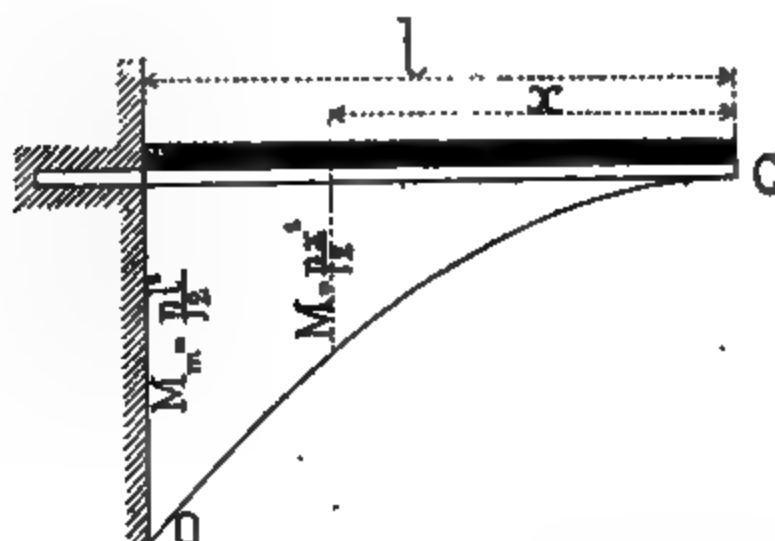


Fig. 18.

2. — La ligne représentative des moments fléchissants correspondant à une charge uniformément répartie, sur une partie de la poutre, est un arc de parabole dans la partie chargée,

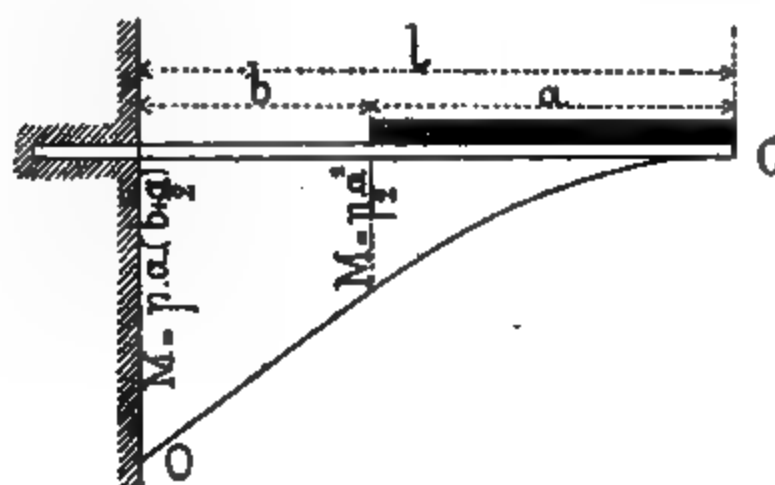


Fig. 19.

cet arc de parabole se prolonge par une tangente dans la partie libre (fig. 19).

3. — Le moment fléchissant maximum est donné, en chaque point de la poutre, par la charge totale, c'est-à-dire par la charge qui s'étend sur toute la longueur de la poutre.

*Efforts tranchants :* 4. — La ligne représentative des efforts tranchants correspondant à une charge uniformément répartie

ur de la poutre est une ligne droite AC  
extrémité de la poutre et donnant sur  
chant maximum égal à

$$T_m = pl$$

1 un point quelconque situé à une dis-  
le la poutre est égal à

$$T = px$$

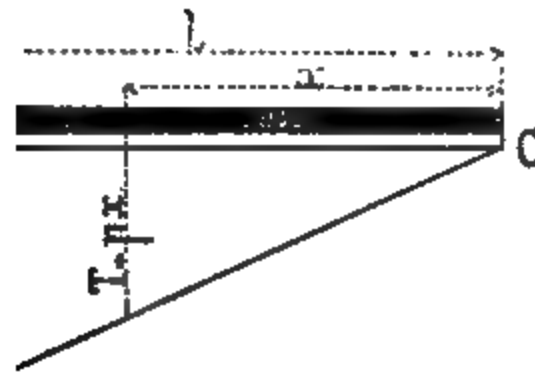


Fig. 20.

la fig. 20 est la ligne représentative  
maximums qui sont donnés par la for-

$$T = px$$

### Charges concentrées

1. — La ligne représentative des mo-  
espondant à une charge concentrée  
te AB (fig. 21).  
it maximum se produit au point d'en-

$$M_m = Pc$$

force P à l'appui.

## RE II — POUTRES A PAROIS PLEINES

léchissant en un point quelconque sit  
appui, plus petite que  $c$ , est égal à

$$M = P (c - x')$$

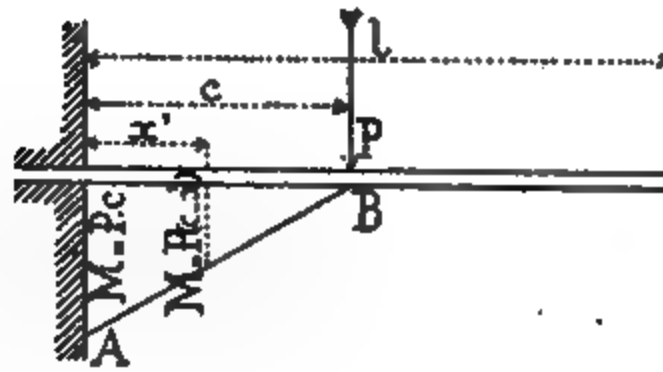


Fig. 21.

e la charge concentrée  $P$  se déplace, le  
imum se produit en chaque point de la  
a charge  $P$  se trouve à l'extrémité de la  
ésentative des moments maximums  
ant par l'extrémité de la poutre (fig.  
sant maximum a pour expression au po

$$M_m = Pl$$

quelconque

$$M = P (l - x')$$

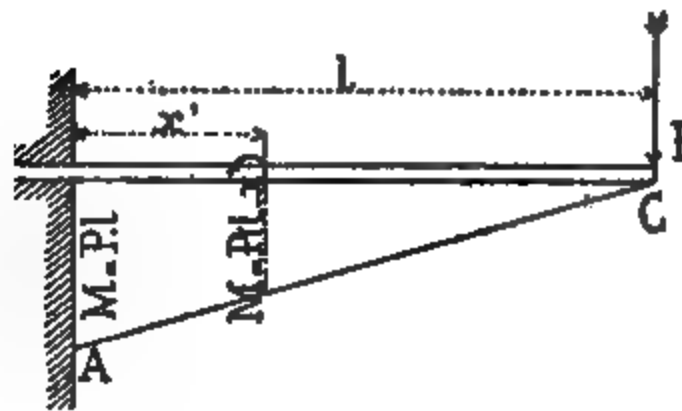
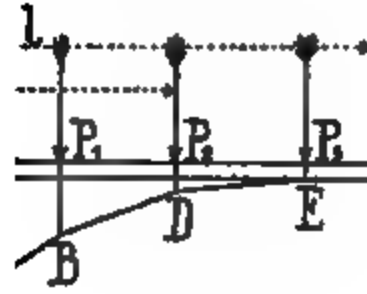


Fig. 22.

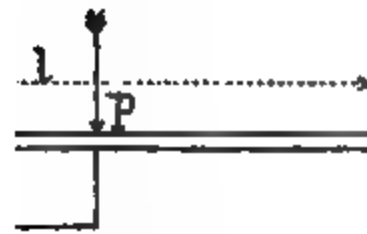
ne représentative des moments fléchiss  
ine série de charges concentrées  $P_1, P_2,$

metts sur les charges (fig. 23).



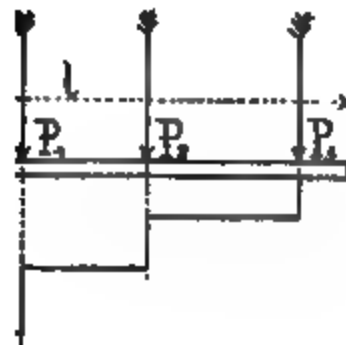
. 23.

l'effort tranchant correspondant  
rémité de la poutre à la charge.  
ient il est constant et égal à  $P$



. 24.

a charge sur la poutre, l'effort  
la charge et l'encastrement.



de des efforts tranchants corres-  
s concentrées  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  est une



ligne brisée en escalier (fig. 25). Et en un point quelconque de la poutre l'effort tranchant est égal à la somme des charges qui se trouvent entre ce point et l'extrémité de la poutre.

7. — Lorsqu'une série de charges concentrées et invariablement liées entre elles se déplacent sur la poutre, l'effort tranchant maximum, en tout point de la poutre, sera donné par la position extrême des charges.

### III. Construction des moments fléchissants et des efforts tranchants

(Planche 1)

Développons les constructions sur un exemple Pl. 1 :

La poutre que nous considérons a 5 mètres de porte-à-faux ; elle est chargée d'une charge uniformément répartie de 300 kilos par mètre courant (charge permanente), et d'une surcharge de 5 poids de 500 kilos chacun espacés de 1 mètre.

La poutre a la section donnée dans la fig. 13, elle se compose d'une partie courante ayant une semelle à la partie supérieure et à la partie inférieure. Cette semelle est renforcée par deux autres semelles qui ne s'étendent que sur une partie de la longueur de la poutre.

Les moments fléchissants dus aux surcharges concentrées s'obtiennent en traçant le polygone funiculaire CB de la fig. 1 au moyen du polygone des forces fig. 2.

Les ordonnées verticales mesurées entre le polygone funiculaire et le prolongement du dernier côté CF de ce polygone représentent les moments fléchissants. Il suffit de les mesurer à l'échelle des forces et de les multiplier par la distance polaire de 2 mètres.

L'échelle des forces étant de 0,00001 par kilo soit  $\frac{1}{100000}$ , et la distance polaire étant de 2 mètres, l'échelle des moments sera de

$$\frac{1}{2 \times 100.000} = \frac{1}{200.000}$$

1<sup>m</sup> pour 200.000

1<sup>m</sup> pour 200

chissants de la charge uniformément répartie en traçant la parabole CA ayant son sommet en A, point d'appui, un moment

$$M' = \frac{pl^2}{2} = \frac{300 \times 5^2}{2} = 3750$$

essin de 1<sup>m</sup> pour 200 ce moment est représenté par 0<sup>m</sup>01875.

ordonnées des deux courbes des moments et la courbe CK des moments fléchissants

### 3. Déformations de la poutre

s correspondant à une charge donnée s'obtient de la ligne élastique. Reprenons l'exemple, fig. 4. La ligne élastique s'obtient par les opérations suivantes :

face des moments en éléments 1 à 7. Les moments sont à très peu de chose près des trapèzes, et on peut les représenter par des triangles. On mène des verticales par les centres des éléments. Puis on porte dans un polygone auxiliaire une verticale, des longueurs 1 à 7 proportionnelles aux moments, et au moyen de droites parallèles à EI (produit du coefficient de rigidité par le moment d'inertie) on trace le polygone des moments sur le côté horizontal.

Les forces ainsi obtenues servent à tracer la ligne élastique qui donne, en chaque point, le déplacement de la poutre.

Pour déterminer l'échelle à laquelle on obtient ces



## § 3

 DROITES REPOSANT LIBREMENT  
SUR DEUX APPUIS

d'une poutre droite reposant librement sur deux appuis, on peut calculer au moyen des *moments fléchissants* et des *efforts tranchants*. Le calcul d'une poutre comprend par conséquent, la détermination des moments fléchissants et des efforts tranchants correspondant à une charge donnée, la recherche des positions de la charge qui produisent les moments fléchissants et les efforts tranchants maximaux. Les positions de la charge qui produisent les moments fléchissants et les efforts tranchants maximaux sont désignées par *charges défavorables*. Nous allons ci-dessous énoncer quelques théorèmes qui s'appliquent aux charges uniformément réparties et aux charges

## Charges uniformément réparties

**Théorème 1.** — La courbe représentative des moments fléchissants, correspondant à une charge uniformément répartie sur toute la longueur  $l$  de la poutre, est une parabole dont le sommet  $C$  est au milieu de la poutre.

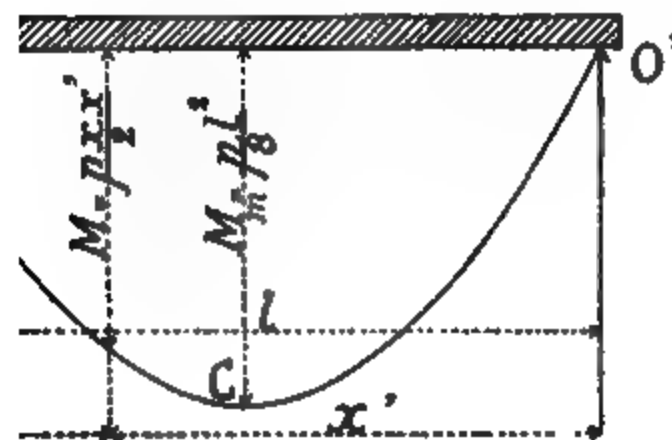


Fig. 26.

Le moment fléchissant maximum au milieu de la poutre est égal à

$$M_m = \frac{pl^2}{8}$$

$p$  étant la charge uniformément répartie par unité de longueur.

Le moment fléchissant en un point situé aux distances  $x$  et  $x'$  des appuis  $O$  et  $O'$  est égal à :

$$M = \frac{pxx'}{2}$$

2. — La ligne représentative des moments fléchissants correspondant à une charge uniformément répartie sur une partie de la poutre, est un arc de parabole dans la partie chargée, et

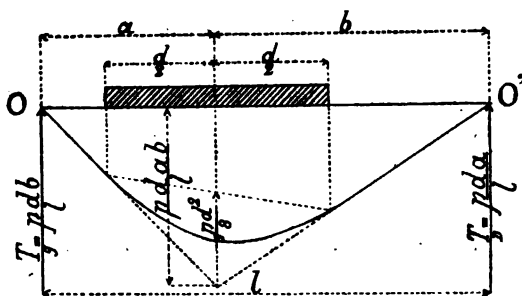


Fig. 27.

cet arc de parabole se prolonge par des tangentes dans les parties libres (fig. 27).

3. — Le moment fléchissant maximum correspondant à une charge uniformément répartie et constante par unité de longueur de poutre est donné, en tout point de celle-ci, lorsque la charge s'étend sur toute la travée.

La parabole des moments fléchissants correspondant à la charge totale est donc la courbe des moments fléchissants maximums (fig. 26).

*Efforts tranchants* : 4. — La ligne représentative des efforts tranchants correspondant à une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre est une ligne droite  $AB$

milieu de la poutre et donnant sur les  
t maximum égal à :

$$T = \frac{pl}{2}$$

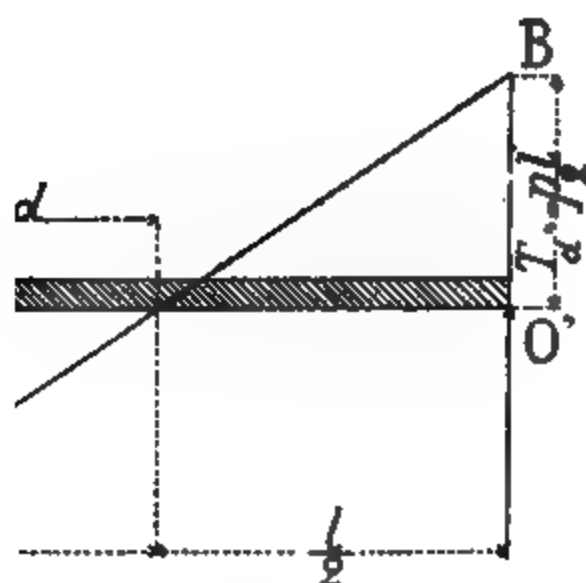


Fig. 28.

un point situé à une distance  $d$  du mi-  
al à :

$$T = pd$$

ant maximum dans une section donnée  
se  $x$  de l'appui  $O'$ , s'obtient en char

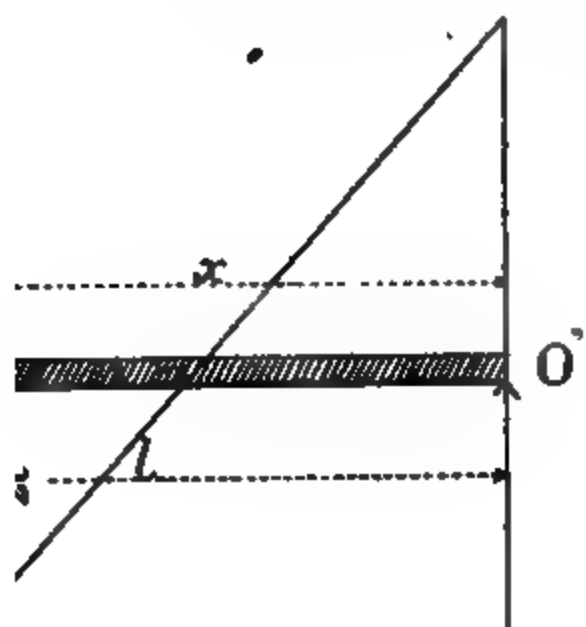


Fig. 29.

## CHAPITRE II — POUTRES A PAROIS PLEINES

re depuis l'appui O' le plus éloigné de l'appui A (fig. 29).

l'effort tranchant maximum est égal à :

$$T = \frac{px'^2}{2l}$$

la ligne représentative des efforts tranchants est une parabole tangente à l'horizontale au droit de l'appui A et tangente à la ligne AC.

l'effort tranchant maximum sur l'appui est égal à :

$$T_m = \frac{pl}{2}$$

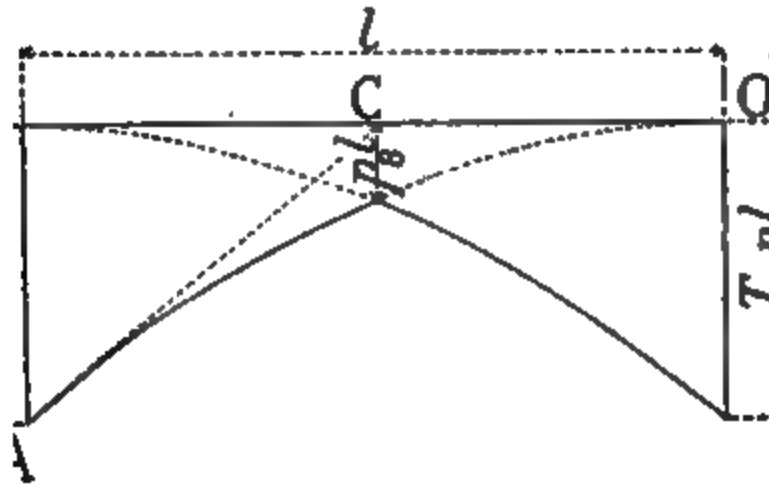


Fig. 30.

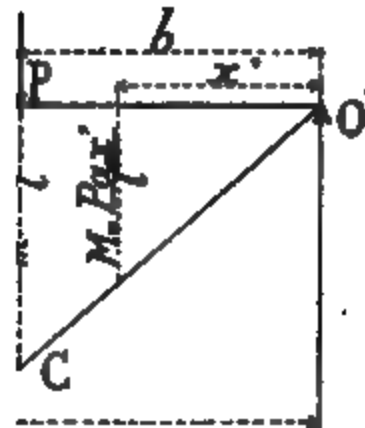
### II. Charges roulantes

**Fléchissants :** 1. — Si l'on porte, à partir de l'appui A, des ordonnées proportionnelles aux moments engendrés aux différents points de la poutre par une charge unitaire concentrée et fixe P, la ligne représentative des moments, ainsi obtenue, se composera de deux segments de paraboles se coupant sur la charge P (fig. 31).

Le moment fléchissant maximum correspondant à une charge unitaire P, se produit au point qui est situé sous la charge, et il est égal à :

$$M_m = \frac{Pab}{l}$$

à l'appui O,  $b$  la distance de



est situé à gauche de la force  
est égal à :

$$\frac{x}{l}$$

est situé à une distance  $x'$  de  
est égal à :

$$\frac{x'}{l}$$

trée P se déplace sur la pou-  
t maximum se produit pour  
ment où la charge passe sur

moments fléchissants maxi-  
e concentrée unique parcou-  
ole OCO', ayant son sommet

m maximorum au milieu de  
èche MC de la parabole et il

$$\frac{l}{4}$$



## I — POUTRES A PAROIS

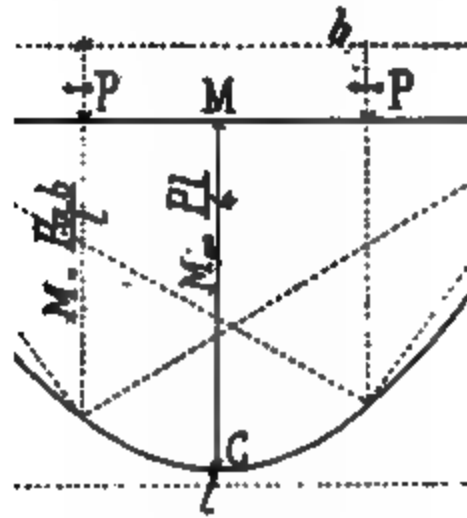


Fig. 32.

omme ordonnées au-des  
chacune de ses positions  
endre dans une section  
de ces moments désigné  
la même que celle de la  
deux droites OC et CO'  
ment est maximum et ég

$$M = \frac{Pab}{l}$$

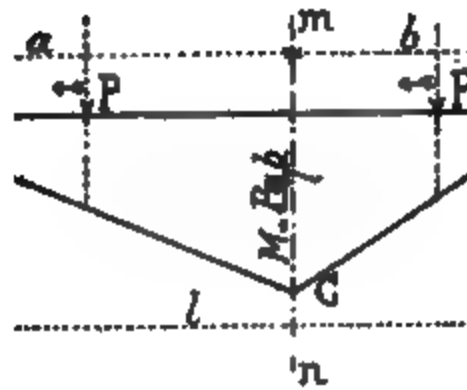


Fig. 33.

ésentative des moments  
ie de charges concentrée  
yant ses sommets sur les

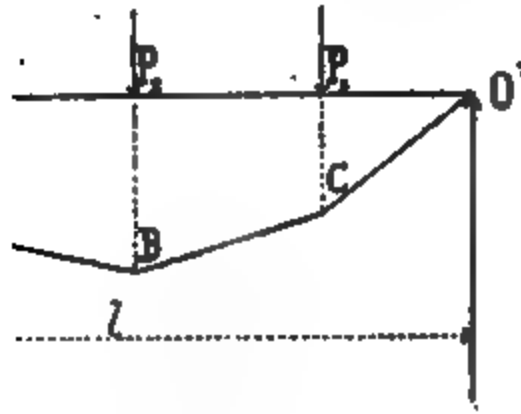


Fig. 34.

de charges concentrées et invariable-  
arcourt une poutre, le moment flé-  
pond en chaque point de la poutre au  
rges sur ce point.

charges  $P$  égales et séparées par une  
courent une poutre, le moment flé-  
duit à une distance du milieu de la  
et ce moment est égal à :

$$= \frac{2P}{l} \times \left( \frac{l}{2} - \frac{d}{4} \right)^2$$

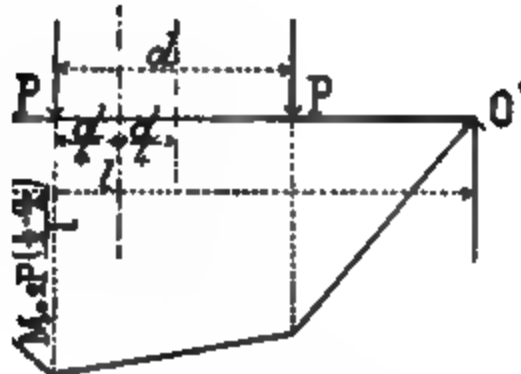


Fig. 35.

— Si l'on porte à partir d'une hori-  
sy, proportionnelles aux efforts tran-  
érents points N de la poutre, par une  
, la ligne représentative ABCD des  
obtenue, se composera de deux hori-  
6).

## POUTRES A PAROIS PL

respondant à une force  
O et la charge ; il chan  
il est également consta

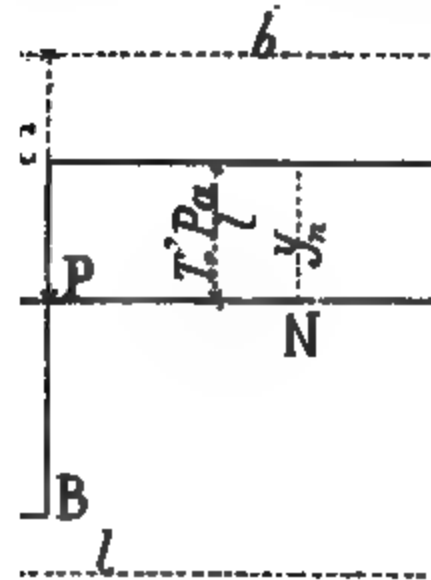


Fig. 36.

lus grand effort tranch  
respond au côté où l'a

tranchant est égal à :

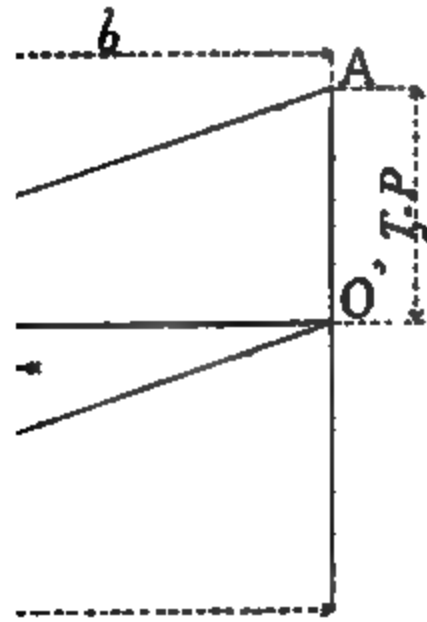
$$T = \frac{Pb}{l}$$

$$T' = \frac{Pa}{l}$$

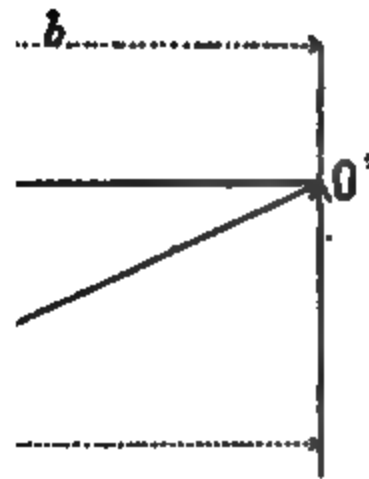
e concentrée unique P  
nt maximum se prod  
nent où la charge pas

des efforts tranchants n  
concentrée unique pa  
ite OA pour un sens o  
l.

mum maximorum se pi



née au-dessous de la charge  
 s positions, l'effort tranchant  
 déterminée  $mn$ , la ligne re-  
 chants ou *ligne d'influence*  
 roites parallèles  $OA$  et  $O'B$ .  
 l la charge est sur l'appui  $O'$ ,  
 roche de la section  $mn$  où il  
 sitive  $\frac{Pb}{l}$  à la valeur négative  
 venir nul quand la charge



40. — La ligne représentative des efforts tranchants correspondant à une série de charges concentrées  $P_1, P_2, P_3$  est une ligne brisée en escalier ABCDEFGH (fig. 39).

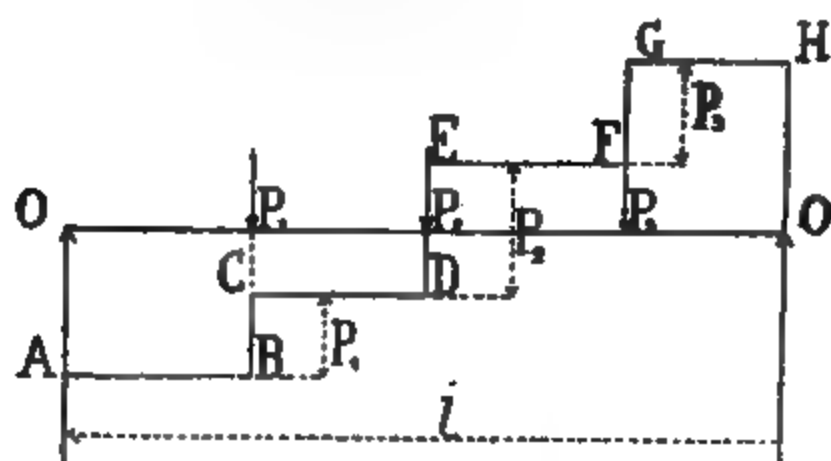


Fig. 39.

41. — Lorsqu'une série de charges concentrées et invariablement liées entre elles parcourt une poutre, l'effort tranchant maximum correspond en chaque point de la poutre au passage de l'une des charges sur ce point.

En général, lorsqu'il s'agit d'un train ayant une machine à l'avant, l'effort tranchant maximum se produira lorsque le premier essieu atteindra la section considérée. (fig. 40).

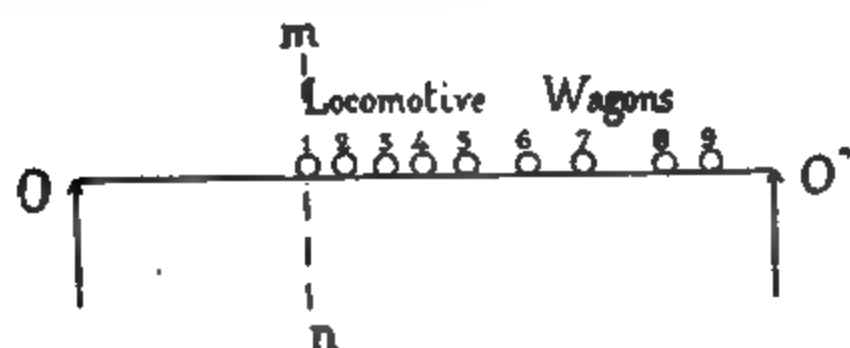


Fig. 40.

Lorsqu'il s'agit d'une file de chars trainés par des chevaux, l'effort tranchant maximum se produira quand le dernier essieu de la file se trouvera sur la section considérée (fig. 41).

Cette règle peut cependant avoir des exceptions, notamment lorsque la première charge est bien inférieure aux suivantes, surtout dans les petites travées et dans le voisinage des appuis.

Il est possible en effet que la première roue 1 ayant dépassé l'appui, la deuxième roue 2 en avançant donne un effort tranchant plus grand que la première.

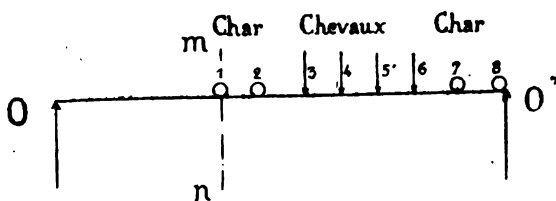


Fig. 41.

### III. Cas où la surcharge porte par l'intermédiaire de poutrelles transversales

Ce qui précède suppose que les charges sont portées directement par les poutres ; mais dans un grand nombre de cas il n'en est pas ainsi, et ce sont des poutrelles transversales qui transmettent la charge aux poutres.

L'influence de ces poutrelles transversales est presque toujours négligeable, lorsqu'elles ne sont pas trop éloignées l'une de l'autre ; cependant, si l'on veut en tenir compte, on pourra le faire en appliquant les théorèmes suivants :

**Moments fléchissants.** — Dans le cas d'une charge uniformément répartie, lorsque la charge est portée directement par la poutre, nous avons vu que la ligne représentative des moments est une parabole.

1. — Quand la charge est transmise à la poutre par des pou-

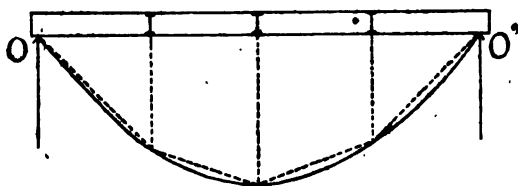


Fig. 42.

trelles transversales, la ligne représentative des moments fléchissants est un polygone inscrit à la même parabole et ayant ses sommets au droit des poutrelles (fig. 42).

2. — Considérons la ligne représentative des moments d'une série de charges  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$  (fig. 43), cette ligne est tracée en trait plein. Pour tenir compte des poutrelles transversales, il suffit de mener les verticales passant par leurs points d'attache, et de joindre entr'eux les points d'intersection de ces verticales avec la ligne représentative des moments; on obtient ainsi la ligne pointillée qui est la nouvelle ligne représentative des moments.

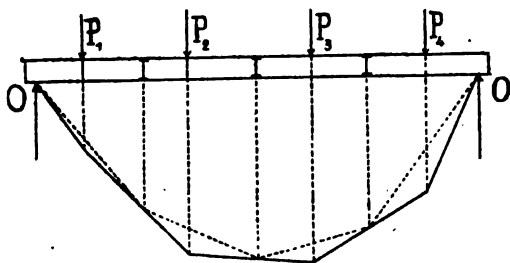


Fig. 43.

3. — On peut dire d'une manière générale que les poutrelles transversales ne modifient pas les moments fléchissants aux points où elles sont attachées à la poutre, et qu'elles diminuent légèrement les moments fléchissants dans les autres sections.

4. — Le moment fléchissant maximum que fait naître dans une section donnée de la poutre le passage d'un convoi qui porte sur elle par l'intermédiaire de poutrelles, se produit à l'instant où un essieu franchit l'une des deux poutrelles voisines de la section donnée.

*Efforts tranchants.* — Les poutrelles transversales ne modifient pas la répartition des charges sur les appuis.

Considérons (fig. 44) deux poutrelles voisines A et B et une charge roulante unique  $P$  allant de A en B.

Pour une position déterminée de  $P$  l'effort tranchant est constant entre les points A et B.

La ligne représentative de l'effort tranchant, lorsque la force





effort tranchant maximum négatif

$$T_m = T_d - p \frac{\overline{BK}}{2d}$$

L'effort tranchant maximum est plus petit que dans le cas où les poutrelles n'existent pas.

2. — Dans le cas d'une charge roulante isolée  $P$ , l'effort tranchant maximum positif dans la partie  $AB$  s'obtiendra en plaçant la charge au point  $A$  et l'effort tranchant maximum négatif en la plaçant au point  $B$ .

Si l'on fait franchir à la charge  $P$  toute la travée, et si l'on porte sous cette force l'effort tranchant correspondant à chacune de ses positions pour la partie  $AB$  de la poutre, la ligne représentative de ces efforts sera la ligne  $OB'A'O'$ .

3. — Dans le cas d'une charge uniformément répartie et dans celui d'une charge roulante unique, la présence des poutrelles transversales ne modifie pas les efforts tranchants maximums en leurs points d'attache, mais elle diminue les efforts tranchants dans la partie située entre deux poutrelles.

4. — Lorsqu'une série de charges  $P_1, P_2, P_3$  (fig. 45), invariablement liées entre elles se meuvent sur une poutre, l'effort

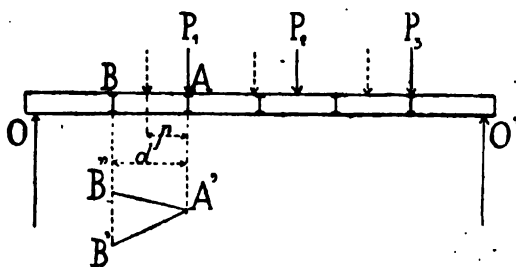


Fig. 45.

tranchant maximum est obtenu, en général, au passage de la première ou de la dernière charge sur la section considérée (voir p.47). Admettons, pour fixer les idées, que ce soit au passage de la première.

Aux points d'attache des poutrelles, au moment du passage

de la charge  $P_1$ , l'effort tranchant est le même que celui qui se produirait si les poutrelles n'existaient pas.

Considérons l'intervalle AB de deux poutrelles.

La ligne A'B' est la ligne représentative des efforts tranchants maximums au droit de la charge  $P_1$  lorsque la charge est portée directement par la poutre.

Pour tenir compte des poutrelles il y a à retrancher la réaction de la poutrelle B, réaction qui a pour expression :

$$\frac{P_1 l}{d}$$

et qui est représentée par une ligne droite.

En retranchant cette valeur de l'effort tranchant trouvé précédemment, on arrive à la ligne représentative A'B'' qui peut se tracer en portant B'B'' =  $P_1$ .

Si BB'' était plus petit que AA' l'effort tranchant maximum positif ne se produirait pas lorsque la force  $P_1$  passe au point A, mais au passage de la charge  $P_2$  ou  $P_3$  au même point.

Ceci suppose que lorsque la charge  $P_1$  arrive au point B, la charge  $P_2$  n'a pas encore franchi le point A et qu'aucune nouvelle charge ne s'est engagée sur le pont.

S'il en était autrement, la méthode ne changerait pas, mais la ligne A'B' serait une ligne brisée ainsi que la ligne A'B''.

L'effort tranchant maximum correspondra toujours au passage d'une charge sur les poutrelles A ou B.

#### IV. Exemple de construction des moments fléchissants, des efforts tranchants et des déformations verticales.

(Planche 2).

La planche 2 donne, avec tous les détails, l'épure de résistance des poutres pleines d'un pont pour voie de chemin de fer. Les données du problème sont les suivantes :

Portée des deux poutres, d'axe en axe des appuis, 10 m. 00

Poids propre du métal et de la voie avec ballast, 2000 kilos





	I	v	$\frac{Rl}{v}$ pour 2 poutres
Avec une semelle	$I' = 0,002.228$	$v' = 0,36$	$2 \times 37.130 = 74.260$
» 2 semelles	$I'' = 0,003.294$	$v'' = 0,37$	$2 \times 53.416 = 106.832$
» 3 semelles	$I''' = 0,004.419$	$v''' = 0,38$	$2 \times 69.774 = 139.548$

*Efforts tranchants* : L'âme des poutres qui résiste aux efforts tranchants a une section constante, il suffit donc de déterminer l'effort tranchant au point où il est maximum, à côté des appuis.

L'effort tranchant maximum de la charge permanente est :

$$T' = \frac{pl}{2} = \frac{2000 \times 10}{2} = 10.000^*$$

L'effort tranchant maximum de la surcharge se produit lorsque le premier essieu  $f$  de la locomotive, après avoir franchi la travée, atteint l'appui considéré.

Cet effort tranchant s'obtient très facilement (fig. 3). Il suffit de prolonger le côté du polygone qui suit l'essieu  $f$ , de mener une verticale à une distance  $l = 10$  mètres de l'essieu  $f$ . La longueur interceptée sur la verticale entre le côté qui a été prolongé et le polygone, représente l'effort tranchant cherché ; mais l'échelle à laquelle l'effort est à mesurer n'est la même que celle du polygone des forces que dans le cas où la distance polaire est égale à la portée ; dans le cas où la distance polaire est  $\frac{1}{n}$  de la portée, l'effort tranchant obtenu est  $n$  fois trop grand.

Dans notre cas l'effort est 2 fois trop grand et en le réduisant, on trouve :

$$T'' = 40.000^*$$

L'effort tranchant total est donc

$$T = T' + T'' = 10.000 + 40.000 = 50.000^* \text{ pour 2 poutres}$$

et par poutre

$$25.000^*$$

La section de l'âme de la poutre qui résiste à cet effort a

re subira par suite un effort tran-

$$= 31,6 \text{ par m/m}^2.$$

fig. 7 se trouve tracée la surface des cas de surcharge S où l'essieu se . Les moments ont été construits

a été divisée en 9 éléments, et l'on sion des éléments les lignes verti- nes verticales qui séparent les sec- re.

rté dans un polygone, des forces ces des moments, savoir

01 pour 5000,

en kilogrammes mètres (pour une mètres.

olaires proportionnelles au produit funiculaire de la fig. 9, donnant les e polygone funiculaire a ses som- ssant par les centres de gravité des moments. Pour valeur de E on a ré.

$$\begin{aligned} \times 16 \times 10^3 &= 35.648.000 \\ \times 16 \times 10^3 &= 52.704.000 \\ \times 16 \times 10^3 &= 70.704.000 \end{aligned}$$

es à l'échelle de

pour 1.000.000.

ons verticales se déduit des sui-

.....	1/100
oments.....	1/5.000.000
.....	1/1.000.000.000

# [ — POUTRES A PAROIS PLEINES ]

ations

$$\frac{1.000.000.000}{5.000.000 \times 100} = 2.$$

sont donc obtenues en double maximum de la poutre mesuré au milieu de la poutre.

■ dans le cas d'une section con

: Lorsque la force P agit au milieu, l'abaissement vertical au point P est donné par la formule

$$f = \frac{a^3 b^3}{3EI l} \cdot P$$

P est placée au milieu de la poutre

$$f = \frac{Pl^3}{48EI}$$

ent répartie : Pour une charge p par mètre courant, l'abaissement au point P est donné par la formule

$$f = \frac{p (abl^3 + a^3 b^3)}{24EI}$$

a poutre au milieu de la travée

$$f = \frac{5pl^4}{384EI}$$

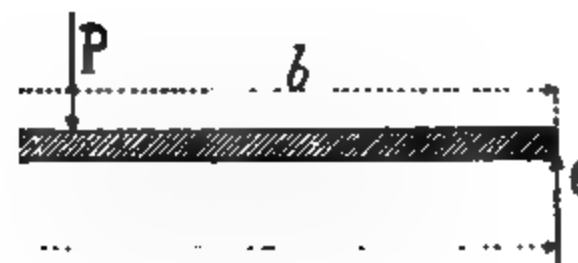


Fig. 46.





En retranchant des déformations verticales obtenues en supprimant l'appui en  $O'$ , celles que donne la réaction  $Q'_B$ , on obtient les vraies déformations verticales de la poutre.

Pour ce qui est de la recherche des moments fléchissants et des efforts tranchants maximums nous donnons ci-dessous quelques théorèmes.

*Moments fléchissants maximums* : 1. — Le moment fléchissant négatif maximum au point d'encastrement  $O$  s'obtient en chargeant complètement la poutre dans la partie  $OO'$ .

2. — Les moments fléchissants positifs maximums ou les moments négatifs minimums sur l'appui  $O$  s'obtiennent en ne chargeant que la partie  $O'C$  en porte-à-faux.

3. — Les moments fléchissants positifs maximums vers le milieu de la travée  $OO'$  et dans la partie située à sa droite s'obtiennent en chargeant la poutre de  $O$  en  $O'$ .

4. — En chargeant la partie  $O'C$  en porte-à-faux on obtient les moments négatifs maximums dans la partie  $O'C$ , sur l'appui  $O'$  et dans la partie à gauche de  $O'$  voisine de ce point.

*Efforts tranchants maximums* : 5. — Les efforts tranchants maximums dans la partie en porte-à-faux s'obtiennent en chaque point en chargeant tout le porte-à-faux.

6. — L'effort tranchant maximum positif en un point  $J$  de la partie  $OO'$  s'obtient en chargeant de  $J$  en  $O'$ .

L'effort tranchant maximum négatif s'obtient en chargeant de  $O$  en  $J$  et de  $O'$  en  $C$ .

## II. Exemple de construction des moments fléchissants et des efforts tranchants

(Planche 1).

L'exemple que nous avons choisi est celui d'une poutre de 11 mètres de longueur totale se décomposant en une travée de 8 mètres et un porte-à-faux de 3 mètres (fig. 5. Pl. 1).

$O$  et  $O'$  sont les deux points d'appui.

La poutre porte 30.000 kilos répartis comme l'indique la fig. 5. Le poids propre de la poutre est compris dans cette charge.

hissants a été tracée d'abord en  
ste pas ; on s'est servi à cet effet  
) , et l'on a tracé le polygone

ces est de 0.001 pour 1,000 ki-  
gale à 2 mètres dans le polygone  
nts est de :

$$000 \times 2 = 2000$$

onnée dans la fig. 11, la seconde  
ongueur de 4 mètres au-dessus

1C a été divisée en 6 éléments 1  
se trouvent dans la partie OO')  
e des forces (fig. 7) à l'échelle de  
cos polaires ont été prises égales  
à éléments 1, 2, 3, et le pôle O<sub>4</sub>  
chelle des EI est de 0,001 pour  
rces a servi à tracer le polygone  
abaissement vertical LF de l'ap-

présentative des moments fléchis-  
action de 20.000 kilos agissant

BO' a été divisée en deux élé-  
mètres, le second de 3 mètres  
considérés comme des forces ap-  
gravité ont permis de tracer au  
(fig. 9); le polygone funiculaire  
vement FK de l'appui O' produit  
DS.

ent l'abaissement au point O' il faudrait  
n O' ; c'est-à-dire diviser l'élément 5 en  
nombre d'éléments est assez considérable  
polygone.  
ents correspond au changement de sec-





à une distance  $a$  de l'appui de gauche et à une distance  $b$  de l'appui de droite, on a :

Réaction sur l'appui de gauche :

$$T_g = \frac{P(3a^2 + 6ab + 2b^2)b}{2l^3}$$

Réaction sur l'appui de droite :

$$T_d = \frac{Pa^2(2a + 3b)}{2l^3}$$

Moment fléchissant au point d'application A de la force P :

$$M_A = T_d b$$

Moment fléchissant au point d'encastrement O :

$$M_o = T_d l - Pa$$

Pour  $a = b$ , lorsque la force P est située au milieu de la travée, on a :

$$T_g = \frac{11}{16} P, \quad T_d = \frac{5}{16} P, \quad M_A = \frac{5}{32} Pl, \quad M_o = -\frac{3}{16} Pl$$

La flexion maxima de la poutre est donnée par la formule :

$$f = 0,00932 \frac{Pl^3}{EI}$$

I étant le moment d'inertie de la section de la poutre.

E le coefficient d'élasticité.

Si l'on désigne par  $y'$  la distance de l'appui O' à laquelle la flexion maxima se produit on a :

$$y' = 0,447l$$

*Charge uniformément répartie* : — Pour une charge uniformément répartie égale à  $p$  par mètre courant on a :

Réaction sur l'appui de gauche

$$T_g = \frac{5}{8} pl$$

-A-†

. O'

, E  
PAI

nts,

9. 1

e-à-

lis.

nts,

nine

app

es 1









DEU

es  
ent

rt  
a e  
soi

ire  
les  
som  
me  
ur

A)  
[R]

rts

us  
de l

...  
...  
=

//

pui







XTF

·  
I=  
405

nt d

prés  
trac  
rtica  
" re  
flé  
OO  
ts i  
e fai  
ppu

gne

.écl

ou 2



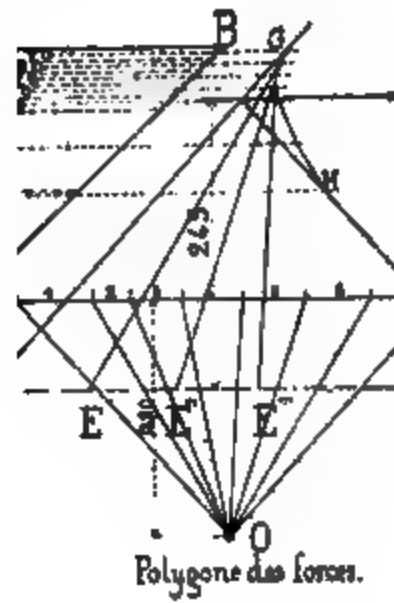






# CE ET MOMENT D'INE

ectangulaire de la s  
 lu trapèze intercept  
 La résultante de  
 u même trapèze.



. 54.

le moment de résist  
 demi-poutre, on poi

tangles.

, 2, 3, 4, 5, 6, 7 agiss  
 s surfaces par le co  
 u de leur hauteur, h  
 C.

gravité des trapèzes  
 horizontales supérieur

one des forces 1, 2,  
 one funiculaire GH.  
 lygone funiculaire i.  
 ongueur EF proporti  
 ni-poutre.

























les deux pièces 1 et 2 et la décomposition se fait dans le polygone des forces.

Du point O nous passons au nœud A ; en ce point agissent les efforts A, 2, 3, 4. Les efforts A et 2 sont connus ; 3 et 4 sont inconnus, ils se déterminent en menant dans le polygone des forces à l'extrémité de l'effort 2 une parallèle à 3, et à l'extrémité de A, une parallèle à 4. On constitue ainsi le polygone fermé 2 A 4 3 qui donne les efforts 2 et 3.

Du nœud A on passe au nœud F où les efforts 5 et 6 sont inconnus, tandis que 1, 3, F sont connus. On forme dans le polygone des forces le polygone F, 1, 3, 5, 6 en menant à l'extrémité de F une parallèle à la pièce 6 et à l'extrémité de 3 une parallèle à 5. Le polygone ainsi tracé détermine les efforts 5 et 6.

Après le nœud F on prend successivement les nœuds B, E, C, D, O' et on arrive ainsi à déterminer dans une même figure tous les efforts agissant dans les pièces du système.

Comme vérification de l'exactitude du tracé les efforts 13 et 12 et la réaction  $T_p$  doivent se faire équilibre.

Nous avons tracé dans la fig. 54 en trait plein tous les efforts de compression ainsi que les pièces comprimées, tandis que les pièces tendues et les efforts de tension sont tracés en pointillé. Le sens des efforts se détermine très simplement en un nœud quelconque F par exemple. Toutes les forces se faisant équilibre, dans le polygone des forces, on aura à donner à toutes les flèches indicatrices du sens des efforts la même direction sur le parcours du polygone. La direction de la force F étant connue, on indiquera dans le même sens les flèches 1, 3, 5, 6. On reportera ces flèches sur les pièces correspondantes. Toutes celles qui se dirigent vers le point F indiquent de la compression ; les autres, qui s'en éloignent, indiquent de la tension.

#### *Comparaison des trois méthodes*

Les deux premières méthodes sont préférables à celle de Cremona, lorsqu'il s'agit de charges variables. Elles permettent de déterminer directement l'effort dans une pièce quelconque de la poutre sans passer par les efforts qui agissent dans les au-









à partir d'une horizon-

!

mément répartie, l'effort  
AC s'obtient en char-  
K ou de l'appui O au

te unique, l'effort maxi-  
nt en plaçant la charge

arges roulantes invaria-  
is un sens ou dans l'au-  
le treillis se produit, en  
rnière charge se trouve  
dans le cas des efforts

pour les deux positions  
charge sur le nœud C

imum dans les barres  
e charge sur l'un des

bles on aura :

œud C et D, la première ou  
es voisines (voir p.46).







à quatre systèmes est *quadruple*.

Considérons deux cas, suivant qu'il y a ou non des montants.

Pour calculer une poutre avec montants (fig. 59), on dédouble les systèmes comme cela est fait dans la figure en appliquant à chacun des systèmes la demi charge. On additionne ensuite, pour les membrures et les montants qui sont des pièces communes, les efforts trouvés dans les deux systèmes.

Dans le cas où il n'y a pas de montants, on dédouble aussi les systèmes et l'on calcule chacun des systèmes en appliquant à chacun d'eux la partie de la charge qui lui est transmise (fig. 60).

*Treillis quadruple* : Pour les poutres ayant plus de deux systèmes de treillis, on les divise en treillis multiples, en appliquant à chacun des treillis la partie de la charge qui lui est transmise. La fig. 61 donne l'exemple d'une poutre à quadruple treillis, divisée en quatre systèmes.

*Distribution des charges à différentes hauteurs* : Dans les fig. 59, 60 et 61 nous avons indiqué les charges au-dessus des poutres ; si les charges étaient au-dessous des poutres, il suffirait de retourner les figures. Enfin, si une partie de la charge portait sur les poutres et une partie sur les membrures, on ferait une répartition pour la charge au-dessus et au-dessous du haut entre les nœuds su-

















# OLIQUE A TREILLIS DOUB

e manière les locomotives  
re le moment maximum  
ntant au droit de l'un des  
l'on retourne la poutre.  
ont été portés dans la

mination rigoureuse de  
ures dans le cas d'un tre  
cun des deux systèmes co  
. On arrivera à un mon  
nt maximum en calculan  
ndant aux deux système  
deux.  
rures sont calculés par la  
nent fléchissant par la dis  
sé.  
x moments fléchissants es

ar la surcharge dans les m  
périeures.

*ndiqué en traits pointillés*

tance du nœud à la membrane $v$		Effort dans brui $V =$
à 1	1 m. 05	107.00
à 2	1 m. 85	106.50
à 3	2 m. 45	100.00
à 4	2 m. 84	95.00
à 5	2 m. 98	89.00









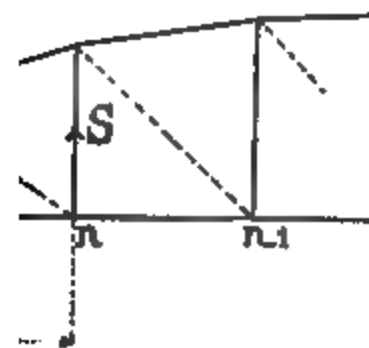
ystème de barres de treillis  
pleins

$s$	$S = \frac{Td}{s}$
m.	
8,30	— 2.200 k.
11,30	— 5.830
14,30	— 12.800
10,40	— 43.200
8,40	— 50.000
6,20	— 18.800
3,90	— 11.100
1,60	— 8.300

égatif sont des efforts de  
des efforts de tension.

montants ne sont à consi-  
soires et transmettent aux  
e partie de la charge, ils se  
xima agissant à leur nœud

osent que les barres de treil-  
dire capables de résister au  
anneau travaille à la com-  
à la tension. S'il n'en était  
e tension trouvés pour les  
illé, et on donnerait au se-  
du premier, les mêmes di-  
tèmes travaille alors au pas-







































































# APITRE III — F

croix. Dans l'ex  
mètres, leur la

Les barres ten  
comprimées ne  
assemblées, co  
vient à peu pr  
ouchent pas, el  
listances de 1,2  
articulier la lig  
104, en escali  
re se trouve

représente  
UXX<sub>1</sub>, X<sub>1</sub>  
rapport de  
des barre  
être adm  
rapport d  
distance e  
Cette d  
donné d'e



Enfin 1





chacun des nœuds, les fibres moyennes se coupent en point comme cela est indiqué (fig. 105).

Lorsque cette condition n'est pas remplie, on soumet ces poutres à des efforts de flexion qui sont d'autant plus grands que l'on s'écarte davantage de cette condition.

Il n'est pas inutile d'insister à ce sujet car on trouve souvent des barres de treillis disposées comme l'indique la fig. 106, et il existe un grand nombre de ponts où le travail des membrures se trouve doublé de ce fait.

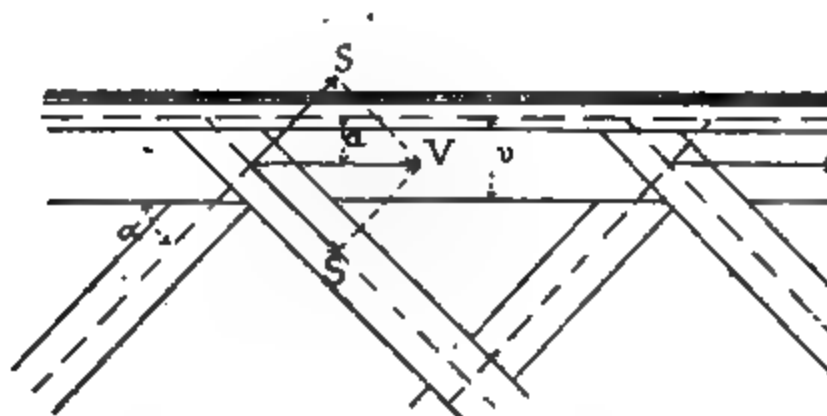


Fig. 106

Si l'on désigne par  $S$  l'effort agissant dans chacune d'une même attache d'une poutre droite, et par  $\alpha$  l'angle que fait une barre avec l'horizontale, la résultante  $V$  des deux barres d'une même attache, est horizontale et

$$V = 2 S \cos \alpha$$

Le couple agissant sur l'attache des barres et la poutre est égal au produit de l'effort  $V$  par sa distance à la fibre moyenne de la membrure :

$$\mu = Va = 2 S a \cos \alpha$$

On peut admettre à cause de leur rigidité relative, comparée à celle des treillis, que les membrures supportent seules ce couple. Le moment fléchissant agissant sur une membrure au point d'attache est alors égal à :

$$M = \frac{\mu}{2} = S a \cos \alpha.$$





Dans le cas où la barre est soumise à un ion (fig. 109) cette barre fléchit par l'effet rs le plan moyen, et tous les points de enne se rapprochent du plan moyen de l'exception cependant des points d'at- ure que la barre fléchit les efforts dimi- ur toute la longueur de la barre, excepté s d'attache, jusqu'à ce que la barre se a position d'équilibre.

idérons deux cas :

*1. barre n'est pas rigide, elle est constituée at rivé sur l'âme de la poutre.*

ouple est faible, il n'a comme bras me des demi-épaisseurs de l'âme de la rre en fer plat: Le montant ou la barre au même point que la barre considérée, résistance à la torsion s'opposeront à la due.

ue l'effort dans la barre de treillis ne se d'une quantité très petite, négligeable. tout à fait justifiée par la pratique : on que les barres en fer plat fléchissent peu ; flexion l'effort correspondant dans les a barre, on arrive à des quantités négli-

*st rigide et offre de la résistance à la*

l y a à considérer des efforts de flexion et ns généralement employées sont celles qui offrent très peu de résistance à la négliger cette résistance.

. d donne alors dans chacune des barres t qui s'obtient en décomposant le couple agissant dans les barres.

barres sont inclinées à  $45^\circ$  on a :

$$M = 2Td \sin \alpha = Sd$$

I le moment d'inertie de la barre et par

### CHAPITRE III — POUTRES A TREILLIS

tance de la fibre extérieure la plus éloignée et située du côté de l'âme, on aura pour le moment maximum de la barre à la tension :

$$R = R_1 + \frac{Sdv}{I}$$

soit le coefficient de travail général de la barre. Prenons par exemple deux cornières de 10 sur une âme de 12<sup>mm</sup> d'épaisseur.

$$\text{soit } S = 22,560^k$$

$$v = 0,0294 \quad I = 0,000.002.10$$

$$d = 0,0354$$

$$R_1 = 5^k \text{ par millimètre carré.}$$

on déduit :

$$R = 5^k + \frac{22.560 \times 0,0354 \times 0,0294}{2.100} = 5 + 11,34$$

le coefficient de travail à la compression dans la barre serait :

$$R = 5^k - \frac{22.560 \times 0,0354 \times 0,0706}{2.100} = 5 - 27^k$$

Les coefficients sont très grands comme on le voit, car ils supposent qu'il n'y a dans la barre ni force à la flexion ni moment d'encastrement. En fait, que toujours soit des montants soit une arche de pont qui maintiennent l'attache. Si on observe la courbure observée dans des ouvrages construits en treillis, on arrive à des coefficients de travail des barres, on arrive à des coefficients de travail que ceux que nous avons obtenus.

Le calcul qui précède n'a d'autre but que de servir à indiquer comment on peut tendre à abaisser le coefficient de travail des barres à chaque fois que l'axe d'une barre de treillis ne se trouve pas dans le plan moyen de la poutre. *Barres comprimées.* — Dans le cas où une barre (fig. 110) cette barre fléchit en s'éloignant du plan moyen de la poutre, il en résulte que le moment de travail croît avec la flèche, et la barre fléchit

position d'équilibre. Si l'on néglige calcul des moments, on arrive au échissant que dans la barre tendue l'exemple précédent, les coefficients des extrêmes seront :

$\pm 5 = 32^k$  à l'intérieur, compression

$\pm 5 = 6^k$  à l'extérieur, tension.

, pour les raisons que nous avons déjà i supérieurs aux coefficients réels que compte de la rigidité des attaches. des chiffres qui précèdent qu'il faut e prudence dans les dispositions des lre écart de la fibre moyenne de la i poutre modifie beaucoup la réparti-

## § 10.

### OUTRES DROITES A TREILLIS

(Planche 8).

l'une épure de résistance de la pou- déterminer les déformations. Cette la courbe des moments fléchissants surcharge pour lequel on recherche ne également la courbe des efforts , les moments de résistance de la ance des barres de treillis.

l. 8, fig 3.

on peut très simplement construire

1 de poutre (fig. 1), et désignons par : e mesurée entre les centres de gra-



$a$  la longueur d'un panneau.

$R$  le coefficient de travail des membrures dans le panneau considéré.

$r$  le coefficient de travail des barres de treillis.

$E$  le coefficient d'élasticité de la matière comme unité de surface que  $R$  et  $r$ .

Les déformations peuvent se diviser en deux parties, celle des membrures ; la deuxième, celle des barres de treillis.

Nous examinerons d'abord séparément ces deux cas et nous les réunirons ensuite.

Nous supposerons que le système est articulé, dans ces termes, nous négligerons les efforts secondaires qui ont peu d'influence sur les déformations d'ensemble. Nous admettrons de plus que les déformations sont faibles, c'est-à-dire que les dimensions de la poutre.

*a. Déformation des membrures (fig. 1).*

Considérons le panneau de poutre à treillis désigné par le chiffre 1 par *panneau 1*.

La rotation  $\delta_1$  d'un montant peut s'exprimer par :

$$\delta_1 = \frac{R_1 a}{Eh}$$

La rotation de la fibre moyenne BC du panneau 1 est égale à la rotation de la fibre moyenne AB du panneau 1 et peut s'exprimer par :

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{R_1 a}{Eh} + \frac{R_2 a}{Eh} = \frac{a}{Eh} (R_1 + R_2)$$

Le déplacement vertical correspondant d'un point quelconque lié à la poutre sera :

$$OO' = x_1 \frac{a}{Eh} (R_1 + R_2)$$

La somme de tous les déplacements, ou le déplacement total  $f$  du point O, lorsque tous les panneaux se déforment sous la même pression :

$$f = \sum x_n \frac{a}{Eh} (R_n + R_{n+1})$$

ou  $x_n$  représente la distance du point O aux points de séparation de deux panneaux  $n$  et  $n + 1$ , et  $R_n, R_{n+1}$  les coefficients de travail des membrures dans les mêmes panneaux.

Pour construire la fibre moyenne de la poutre déformée, il suffit de tracer un polygone funiculaire au moyen d'un polygone des forces dans lequel on portera les  $(R_n + R_{n+1})$  comme forces, avec une distance polaire égale à  $\frac{Eh}{a}$ . Les sommets du polygone funiculaire se trouveront sur les verticales des montants. Cette construction a été faite dans les fig. 4 et 5. Les segments verticaux interceptés entre le polygone funiculaire et sa ligne de fermeture représentent les abaissements de la poutre aux points considérés.

Dans le cas où la poutre subit des efforts symétriques par rapport à son milieu, on prendra le pôle O' sur une horizontale menée au milieu de la longueur totale représentant la somme des  $R_n + R_{n+1}$ . Dans le cas contraire on prendra un pôle O situé à une hauteur quelconque, on tracera un premier polygone AB et on le redressera par le procédé connu, en menant par le point O une parallèle OC à AB puis une horizontale CO'; le point O' situé sur la même verticale que le point O est le pôle qui correspond au polygone funiculaire AB' ayant une ligne de fermeture horizontale.

*b. Déformation due aux barres de treillis.*

Considérons un seul panneau (fig. 2).

La déformation des barres de treillis sera, quel que soit du reste le nombre de ces barres,

$$KM = \frac{ra}{E \cos \alpha}$$

Le déplacement relatif d'une section extrême de panneau par rapport à l'autre sera :

$$KL = \frac{ra}{E \cos \alpha \sin \alpha}$$

La déformation totale en un point T de la poutre (fig. 7) sera :

$$DD' = TD' - TD = \frac{a}{E \cos \alpha \sin \alpha} \left[ \frac{\tau}{\Sigma r_o} - \frac{OT}{OO_1} \frac{\sigma_1}{\Sigma r_o} \right]$$

La construction de ces déformations peut être indiquée (fig. 6) en construisant sur un point  $O$  les expressions  $\frac{ra}{E \cos \alpha}$  voulu, et en menant des horizontales qui déterminent les déformations sur chacune des verticales.

Nous remarquerons que dans la fig. 6 la symétrie de la poutre conduit à une ligne de fermeture pour le polygone; si la symétrie n'existait pas, la ligne  $AF$  serait la même, mais la ligne  $AF$  serait

En ajoutant les ordonnées qui donnent les déformations venant du treillis à celles qui sont dues aux charges, nous obtenons (fig. 4) la courbe des déformations totales.

Il va sans dire que si l'on conservait pour l'échelle du dessin, on arriverait à des longueurs énormes. On choisit en général les échelles de sorte que les déformations en vraie grandeur. C'est ce qui est fait pour la poutre de la Pl. 8.

Dans la fig. 5 les  $R$  ont été portés à  $1^{\text{mm}}$  par

La distance polaire  $\frac{Eh}{a} = 16.000 \times \frac{5,0}{3,7} = 21.600^{\text{mm}}$  donnerait les déformations à l'échelle de  $\frac{1}{500}$ . Pour obtenir ces déformations en vraie grandeur nous avons pris comme distance polaire

$$\frac{21.600}{500} = 43^{\text{mm}},2.$$

La méthode qui précède s'applique aussi aux poutres reposant sur deux appuis. La méthode de la poutre de la planche est précisément celle d'une poutre

## § 11

### DÉFORMATION D'UNE POUTRE A TREIL QUELCONQUE

#### I. Exposé de la méthode

Nous étudierons uniquement les déformations

es un intérêt pratique. Les déplacements  
ibles et peuvent être négligés.

la fig. 111 une poutre à treillis d'une forme



Fig. 111

e de ses membrures CD de longueur  $s$ .

travail de la membrure ;

ceud opposé A à cette membrure ;

lasticité du métal.

ngueur  $\Delta s$  de CD peut s'exprimer par :

$$\Delta s = \frac{sR}{E}$$

e l'angle  $\delta$  que font entre elles les lignes  
primer par :

$$\Delta \delta = \frac{sR}{Ea}$$

ablement liée à la construction se brisera  
éformation du même angle  $\Delta \delta$ , et la bri-  
la perpendiculaire menée du point de rota-  
onsidérée. La ligne horizontale des appuis  
se brisera au point B situé sur la verticale  
et A. En même temps les points O et O'  
ut, mais nous négligerons leur déplacement  
et nous supposons que la ligne OBO'  
n passe toujours par les points O et O'.  
a ligne déformée OB'O' il suffit de mener  
B' passant par les appuis, se coupant sur  
A et faisant entre elles un angle  $\Delta \delta$ .

Cette construction peut se faire en considérant comme une force verticale  $P$  appliquée au point  $A$ , et trouvant le polygone funiculaire correspondant avec tance polaire égale à  $a$ .

Pour déterminer la déformation totale de la ligne l'influence des déformations de toutes les membrures, de tracer le polygone funiculaire correspondant à un des forces dans lequel on prend comme forces les allong des membrures, et comme distances polaires une long riable et égale à la distance  $a$  de la membrure au nœud

Dans le plus grand nombre de cas on peut néglig formation des treillis, son influence étant faible relativ

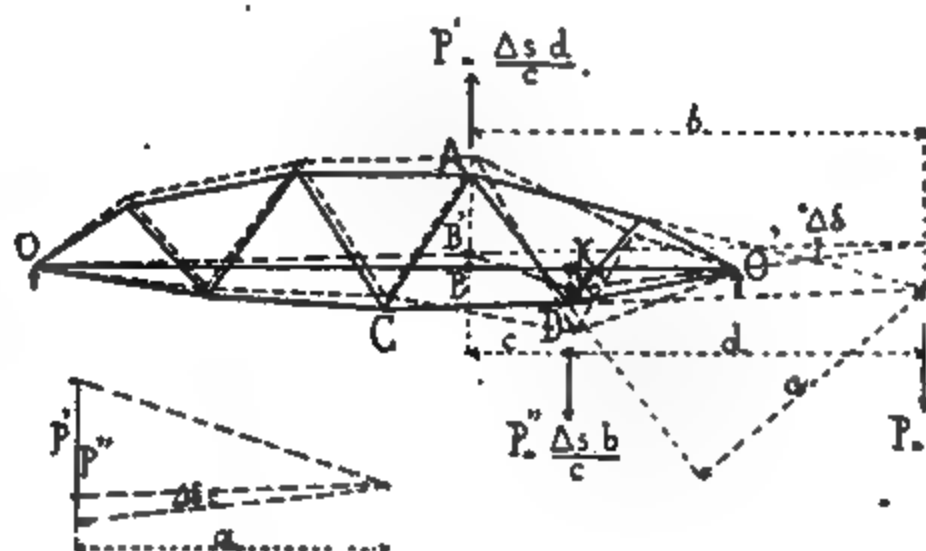


Fig. 112

celle des membrures. Si l'on veut en tenir compte, on faire comme pour les membrures, de la manière suiv

Considérons la barre  $AD$  de la fig. 112 et désignons veau par  $\Delta s$  sa variation de longueur et par  $R$  son co de travail. La partie de la construction située à gauch tournera par rapport à celle de droite, supposée fixe, au point  $F$ , et l'angle de rotation  $\Delta \delta$  aura comme précéd pour expression :

$$\Delta \delta = \frac{sR}{Ea}$$

La ligne  $OO'$  se brise d'un angle  $\Delta \delta$ , mais la brisur

sur la perpendiculaire menée du point F sur

que la ligne OO' soit invariablement reliée  
cales à chacun des nœuds, elle aura après  
la forme OB'K'O'. Cette ligne brisée doit  
litions suivantes : les droites OB' et K'O'  
l'angle  $\Delta\delta$ , et elles se coupent sur la verti-  
racé peut se faire comme précédemment au  
gone funiculaire et d'un polygone des for-  
verticalement au point F une force  $P = \Delta s$  et  
istance polaire égale à  $\alpha$ .

n diffère de celle que nous avons obtenue pour  
ce que l'intersection des lignes se fait en de-  
s, et il reste pour avoir la ligne déformée à re-  
et K', intersections des côtés du polygone fu-  
s verticales menées par les points A et D.  
ile de remarquer que l'on peut substituer à la  
eux composantes agissant en B ou A et en  
ainsi directement au tracé complet. Ces com-  
valeurs suivantes :

1 :

$$P' = -\frac{\Delta s \times d}{c} = -\frac{s \cdot R \cdot d}{E \cdot c}$$

2 :

$$P'' = \frac{\Delta s \times b}{c} = \frac{s \cdot R \cdot b}{E \cdot c}$$

de horizontale des points D et F ;

3 A et F ;

nts A et D.

à chacun des nœuds les poids P' et P'' cor-  
barres de treillis et en construisant le poly-  
correspondant à ces efforts, on obtient la ligne  
telle que la déformerait l'action seule des

qu'il faut tenir compte des signes à donner  
et P''.

### RE III — POUTRES A TREILL

=  $\Delta s$  devra être beaucoup plus polaires  $\alpha$ , autrement les déformations. On choisit en général une ligne déformée reproduise la grandeur.

les déformations verticales faibles comparées à celles qui ont surtout pour les poutres déformations se fait en général large qui donne les plus grandes de la surcharge totale, les poutres paraboliques n'éprouvent dans les barres de treillis, et très peu.

présente assez fréquemment, on bien déterminer séparément l'un des systèmes et prendre les déformations, ou bien encore l'action des barres de treillis, par les efforts  $P$ , les points  $G$  (fig. 1) lieu des panneaux entre les points posés à la membrure considérée. Vous avons donné dans la figure précédente la construction des déformations d'une poutre droite par une méthode générale et spéciale à ce cas. Le mode qui précède pourrait aussi s'appliquer.

#### Exemple de la planche 9.

On a pris comme exemple dans la figure une poutre parabolique de 62<sup>m</sup>,4 de portée sous un poids uniformément réparti. Les barres de treillis ne subissent pas cette charge et leurs déformations. Le travail des membrures est sensiblement le même que celui de la poutre ; il est de 2<sup>kg</sup>/cm<sup>2</sup>.

avons déjà dit que lorsqu'il s'agit des déformations de tenir compte des couvre-joints. Dans le cas où les couvre-joints ont à peu près le  $\frac{1}{40}$  de la longueur des membrures, la raideur de ces membrures sera augmentée de  $\frac{1}{40}$  et nous introduirons dans nos

$$\text{coefficient } R = 2,5 - \frac{2,5}{40} = 2,25.$$

Si le treillis est double, et nous prendrons la réaction d'une membrure au milieu de la mem-

brure pour les membrures supérieures et inférieures du panneau les expressions :

$$\frac{\Delta s' R'}{E}$$

pour la supérieure ;

$$\frac{\Delta s R}{E}$$

pour la inférieure.

On applique au milieu de chaque panneau la charge

(1). Comme distance polaire, pour le tracé du funiculaire, on prend une valeur moyenne entre  $a$  et  $b$  différent peu l'une de l'autre, c'est ce qui donne leur moyenne en réunissant les deux expressions pour la membrure supérieure et de la membrure inférieure.

Le funiculaire (fig. 2) tracé avec les forces  $P$  et les réactions verticales. Celles-ci sont obtenues en remarquant que les expressions  $P$  qui représentent les charges ont été portées en vraie grandeur dans le polygone (fig. 2). La flèche prise par la poutre au milieu est de 27<sup>m</sup>.



CHES A

REVE

estins  
horizo  
l'un po  
luit le  
la fle:

ppés  
re cor  
peut c  
er à c

nière g  
nt et t  
ce tal  
ns le c  
, de q  
mine  
ient  $p$   
différ  
ère pa  
nptés  
sur de  
 $p_i$  les  
ante  $p$   
laire c  
ante a  
chir ce  
at la p  
outre  
où les  
arient

tance d'un tablier au vent dépend du on de ses contreventements et de la ma- isé. Nous examinerons successivement tre le plus souvent :

ier à voie inférieure, ayant un seul plan a partie inférieure.

blier à voie inférieure ayant deux con- 'un dans le plan des membrures supé- plan des membrures inférieures.

blier à voie supérieure contreventé dans supérieures et dans le plan des mem- c entretoisements.

t située dans la partie moyenne du ta- ntement dans le plan de la voie se ra- Le contreventement qui est situé dans out être compté dans la résistance géné- ion parce qu'il est dépourvu de mem- t pour but de donner à la voie la rigi- eut être très léger.

ntement soit bien efficace il faut qu'il e véritable poutre, c'est-à-dire qu'il se et de treillis, et qu'il rencontre sur les On conçoit en effet aisément que si l'on a, ventement supérieur dans un tablier tu- ntement ne rencontre pas sur les appuis . pour transmettre à sa partie inférieure ventement supérieur, ce dernier n'agira

**rieure ayant un seul plan de contreven- e les membrures inférieures.**

re horizontale AB constituée par les ar le contreventement du plan AB, ré- horizontale ; elle sera à calculer pour rant, effort qui, comme nous l'avons int à un autre de la poutre.



dû au

l suffit  
rieure  
charge

ieure.  
ent pas  
~~autres~~  
hacun  
sa par-  
par le

it sont  
ns aux  
ient  $\mu$   
uivant  
re.

tin. —  
pte de  
ain, il  
c, pour  
et des  
ns in-  
nais il  
ges sur



a une raideur égale à celle de la  
 oment au même point est :

$$d = \frac{Th}{4}$$

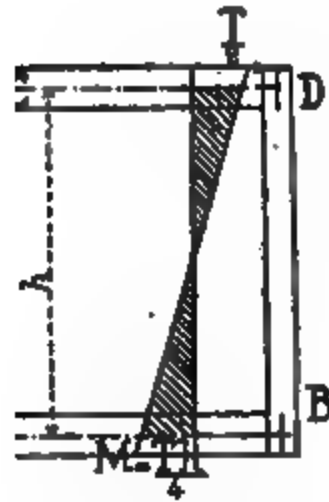


Fig. 118

de pont aux points A et B est le  
 nts en ces mêmes points, il est  
 tif au point B ; il varie suivant  
 t par zéro au milieu de la pièce

s résultats ne sont qu'approxima-  
 à tenir compte de l'élasticité de  
 tes les pièces. Le cadre sur ap-  
 s ne peut fléchir sans entraîner  
 ec lui toute la paroi, qui offre aussi  
 part de résistance ; mais si l'on  
 me au cadre une grande raideur  
 se trouvera dans de bonnes con-  
 ions de résistance et on soulagera  
 parois verticales de la plus grande  
 tie des efforts de flexion qu'elles  
 aient à subir sans l'existence de  
 cadre.

entre le plan supérieur et le plan  
 ant l'effort  $p$  en deux efforts situés

### CHAPITRE III — POUTRES A 2

re sur appuis n'a pas  
rticales transmettent un  
re, et il est très difficile  
t supposer que le contre-  
leuler le tablier comme  
le contreventement sup-  
re lui permet de trans-  
ffort total, puis appliqu-  
nférieur.

sur le train est trans-  
nférieur.

de supérieure avec deux  
se entretoisements sur to

nouveau par  $p$  la résu-  
ourant de tablier, cette  
l'action du vent sur le  
n un couple  $pr$  et une  
u de la hauteur des poi-  
s, comme cela est géné-  
rures de la poutre ont  
tres verticales AC et  
res horizontales AB et CD  
nera dans chacune des  
un effort  $\frac{p'}{2}$  par mètre c

Le couple  $pr$  peut  
deux autres couples  
dans les deux plans  
l'autre  $p_h h$  agissant  
zontaux AB et CD ; on

$$p_r d + p_h h$$

Pour déterminer  $p$ .  
La considération des  
action de ces couples ne

Nous admettons, à cause des entretoisements, qu'une section rectangulaire reste encore rectangulaire après la déformation.

Il résulte de cette hypothèse que la rotation  $\delta$  entre deux sections voisines devra être la même pour les 4 faces AB, CD, AC et DB.

Et puisque les rotations sont très petites, le déplacement horizontal des faces AB et CD sera :

$$\Delta h = \frac{\delta \cdot h}{2}$$

et pour les faces AC et BD

$$\Delta v = \frac{\delta \cdot d}{2}$$

Le déplacement horizontal au déplacement ver-

$$\frac{\Delta h}{\Delta v} = \frac{h}{d} \quad (2)$$

la relation entre ces déplacements et

soit un panneau du tablier, compris entre les faces ACDB et A'C'D'B'. Chacun des deux panneaux est lié au cadre ACDB par 3 pièces, une barre de treillis et une barre de contreventement. Ils déplaceront tous de la même quantité  $\Delta h$  suivant l'horizontale.

Les trois pièces tracées en traits pleins sont liées au cadre voisin.

1. Section de la membrure,

2. Section de la barre de treillis,

3. Section de la barre de contreventement.

Les angles sont désignés dans la figure.





Les deux figures 123 et 124 donnent les déplacements  $\Delta v'$  et  $\Delta v''$  dus, le premier à la déformation  $\Delta a$  de la membrure, le second à la déformation  $\Delta t$  de la poutre de treillis.

La somme de ces déplacements égale à  $\Delta v$ .

Ainsi :

$$v = -\frac{\Delta a}{\operatorname{tg} \alpha_v} + \frac{\Delta t}{\sin \alpha_v} \quad (6)$$

De manière analogue on trouve aussi :

$$h = \frac{\Delta a}{\operatorname{tg} \alpha_h} - \frac{\Delta c}{\sin \alpha_h} \quad (7)$$

En substituant dans ces expressions les valeurs trouvées

pour le rapport  $\frac{\Delta h}{\Delta v}$  à  $\frac{h}{d}$ , en remplaçant  $\alpha$  par  $\alpha \operatorname{tg} \alpha_h$ , puis en transformant

$$\frac{\frac{1}{\omega_h \sin \alpha_h \cos^3 \alpha_h}}{\frac{1}{\omega_v \sin \alpha_v \cos^3 \alpha_v}} \quad (8)$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{0,353 \omega_h} \\ &+ \frac{1}{0,353 \omega_v} \end{aligned}$$

les rapports que l'on rencontre

$$\Omega, \quad \omega_h = \frac{1}{12} \Omega$$

on trouve les valeurs

$$3,4.$$

### CHAPITRE III — POUTRES A T

ant la déformation  $\Delta\alpha$  des m  
n  $\Omega$ , on trouve

$$\frac{p_v}{p_h} = 4,0 \text{ au lieu de } 3,4.$$

e (8) n'est pas rigoureuse, pa  
les membrures ont une défo  
nes que le plan ABDC se ga  
aux voisins s'opposent en pa  
diminue le  $\Delta\alpha$ . Il est très diff  
uence; mais les chiffres qui  
en supposant  $\Delta\alpha = 0$ , le résul  
ient alors :

$$\frac{p_v}{p_h} = \frac{\omega_v \sin \alpha_v \cos^3 \alpha_v}{\omega_h \sin \alpha_h \cos^3 \alpha_h}$$

, les formules (8) et (9) don  
ur se trouve entre les deux  
peu différentes, on pourra  
préférence celle de la formu

nant les formules (4) et (9) et e  
a formule (9) on trouve

$$p_h = \frac{pr}{d.K+h}$$

$$p_v = \frac{pr}{d + \frac{h}{K}}$$

et  $p_h$  étant déterminés, on  
upérieur pour un effort

$$\frac{p}{2} + p_h \text{ au mètre courant ;}$$

tement inférieur pour un effo.

$$\frac{p}{2} - p_h$$

des poutres verticales pour un  
charges.

érieures se calculeront en faisant agir  
 rt  $\frac{p}{2} + p_h$  et verticalement un effort  
 au même en chargeant la poutre ver-

$$\left( \frac{p}{2} + p_h \right) \frac{h}{d} - p_v$$

érieures se calculeront en chargeant la  
 ids

$$\left( \frac{p}{2} - p_h \right) \frac{h}{d} - + p_v$$

érieure opposée au vent qui est la plus

Le contreventement supérieur est  
 plus fatigué que le contreventement  
 inférieur.

Sur les appuis on dispose un en-  
 tretoisement robuste (fig. 125), qui  
 est calculé pour transmettre la réac-  
 tion horizontale du contreventement  
 supérieur aux appuis. Cette réac-  
 tion est égale à :

$$T = \left( \frac{p}{2} + p_h \right) \frac{l}{2}$$

$l$  étant la portée du tablier.  
 tretoisement AD et CB seront calcu-  
 ort S, obtenu par une simple décom-  
 x points C et D, comme l'indique la

applique aussi bien à des poutres re-  
 qu'à celles qui reposeraient avec con-  
 uis. Dans le dernier cas on tiendrait  
 comme on le fait dans les poutres ver-



ts sur les surfaces seront les sui-

	Surfaces	Efforts
$0,60 + 0,40 =$	$1^{\text{m}^2},00$	$270^{\text{k}}$
$1,07 + 0,72 =$	$1,79$	$483$
	$0,43$	$35$
	$0,60$	$162$
	<hr/> $3^{\text{m}^2},52$	<hr/> $950^{\text{k}}$

miner par le polygone des forces  
la fig. 3 la position de la résul-

à  $3^{\text{m}},65$  au-dessus du niveau des

chargée d'une quantité

$$\frac{0 \times 3,65}{5,00} = 693^{\text{k}}.$$

e du même poids de  $693^{\text{k}}$ .  
ventement inférieur de manière  
t du vent et nous supposerons  
emps sur toute la longueur de la

treillis double et l'effort se parta-  
s systèmes.

Effort tranchant est donné, dans  
contreventement, par l'ordonnée de  
au milieu du panneau.

en portant OT égal à la moitié  
ée et en joignant le point T au

treillis de contreventement s'ob-  
es extérieures, suivant la direc-  
e horizontale.

es, les efforts maximums qu'elles  
sont donnés ci-dessous.

### RE III — POUTRES

Section d'une

2 cornières 100 X 100

2 cornières 70 X 70

ue la résistance à  
flambage se vérifi

tenant quel est l'e  
porter. A cet effet  
résistance des m  
ants est donnée da  
t horizontal que le  
érieure d'un mont  
eure une rigidité é  
is pour le momen

$$M = \frac{Th}{4} = \frac{T \times 6,4}{4}$$

$$T = \frac{4M}{6,4}$$

ment d'inertie à l  
nt :

$$\frac{I}{v} = 0,0017.$$

ravail dont on disp

$$R = 4^e \text{ par mm}^2$$

ssant ne devra dor

$$= 0,0017 \times 4.000.000$$

à laquelle correspond :

$$T = \frac{4 \times 6800}{6,4} = 4250 \text{ k.}$$

La réaction horizontale totale est de :

$$\frac{950 \times 60}{2} = 28.500 \text{ k.}$$

Le contreventement supérieur est donc capable de soulager de  $\frac{1}{7}$  seulement le contreventement inférieur.

On a donné aux sections des barres du contreventement supérieur les mêmes dimensions qu'à celles du type 2 du contreventement inférieur.

Considérons maintenant le cas d'un vent de  $150^{\text{k}}$  avec surcharge.

Les surfaces offertes au vent par la première paroi ne changent pas.

Après la première paroi le vent rencontre le train qui offre une surface de  $2^{\text{m}^2},20$  à multiplier par le rapport  $0,675$  trouvé précédemment.

Il y a donc à compter pour le train :

$$0,675 \times 2,2 = 1^{\text{m}^2},48.$$

Les surfaces présentées au vent par la seconde poutre sont à réduire dans le rapport :

$$0,675 \times \frac{7-2,2}{7} = 0,46$$

Elles seront les suivantes :

$$\text{Membrure supérieure } 0,60 \times 0,46 = 0^{\text{m}^2},27$$

$$\text{Treillis et montants } 1,07 \times 0,46 = 0^{\text{m}^2},50$$

En résumé les efforts que nous compterons pour le vent seront :

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| 1. Membrures supérieures | $(0,60 + 0,27) \ 150 = 130^{\text{k}}$ |
| 2. Treillis et montants  | $(1,07 + 0,50) \ 150 = 235$            |
| 3. Train                 | $1,48 \times 150 = 220$                |
| 4. Platelage             | $0,13 \times 150 = 20$                 |
| 5. Membrure inférieure   | $0,60 \times 150 = 90$                 |

Effort total

695<sup>k</sup>



### CHAPITRE III — POUTRES A T

t étant plus faible que celui du ca  
n'y a pas à en tenir compte dans l  
nts, mais nous allons déterminer  
es membrures et des barres de tre  
on a construit dans la fig. 4 la p  
elle passe à 3<sup>m</sup>,500 au-dessus du  
urge  $p_v$  dans la poutre BD sera :

$$p_v = \frac{695 \times 3,5}{5} = 486 \text{ k.}$$

e part l'effort horizontal du vent  
re B un effort qui correspond à u

$$\frac{695 \times 7}{5} = 973 \text{ k}$$

la hauteur des poutres ;  
cartement.  
ions ci-dessous de quelle manière  
ence du vent dans les poutres.  
rure B :  
tation de charge verticale égale à  
rure D :  
tation de charge  
s :  
tation de charge de  
embrures A et C sont soulagées, e  
me les membrures B et D si le  
osé.

### exemple de calcul d'un pont à voie

g. 7 et 8 représentent la coupe tra  
tielle du pont.  
rfaces offertes au vent par le tab  
s ; elles sont rapportées au mètre  
urs moyennes.

)

00

les

.  
és |

Mort  
67'

189

310

340

106'

posi

eur

itre

:

### TRE III — POUTR

e, qui peut être r  
rventements le mé

$$\frac{806}{2} = 403$$

ec surcharge.

n vent de 150<sup>k</sup> av  
les surfaces comp  
rts seront les suiv

uin	2,20
rde-corps	0,25
périeures et	
	0,70
tants	4,15
érieures	0,89
	<u>5,19</u>

le polygone funi  
es détermine la  
,40 au-dessus des  
torsion est égal à  
 $\pi = 780 (4,40 - 2,2$   
ur l'application de

$$\alpha_v = 45^\circ, \quad \alpha$$

le du contrevente

$$\omega_h = 1700^{mm^2} \text{ pour}$$

le du treillis :

$$\omega_v = 7500^{mm^2}$$

le système de tre  
donne avec ces va

$$\frac{p_v}{p_h} = 4,1.$$

pour  $d = 4,0$  et  $h = 4,5$  :

$$\frac{1677}{1 \times 4,1 + 4,5} = 80k.$$

$$\frac{1677}{4,00 + \frac{4,5}{4,1}} = 330k.$$

l'effort supérieur est à calculer avec un effort

$$403 + 80 = 470k.$$

l'effort inférieur avec un effort égal à :

$$403 - 80 = 310k.$$

On compare ces valeurs avec celles données par le vent sans le contreventement supérieur est le effort qui est maximum dans le cas d'un vent égal à  $470k$ , tandis que le contreventement inférieur a qu'un effort maximum de  $403k$  dans le cas contraire.

Les poteaux verticales se calculera en ajoutant à l'effort de  $330$  kilos.

On calculera en négligeant l'influence de la charge de vent, avec un effort de  $403k$  par mètre de poteau, ou un effort égal à :

$504k$  agissant verticalement.

Le moment sur appuis se calcule pour la section du contreventement supérieur :

$$\frac{70 \times 45}{2} = 10.575k.$$

On se réfère fig. 12 de la planche, comme cela



contact avec les pièces C et D augmente

— D'après M. Résal on calcule les rou-

$$r \leq \frac{8}{3} r R \sqrt{\frac{R}{E}} \quad (1)$$

$$r \geq \frac{3 P}{8 R} \sqrt{\frac{E}{R}} \quad (2)$$

est la charge que peut porter par mètre  
une longueur égale à l'unité et d'un  
coefficient d'élasticité de la matière et  
travail maximum admis pour le métal.  
ées sont la charge totale Q sur l'appui  
aux qui varie suivant la portée en-  
connue est donc la longueur totale l des  
près les formules précédentes :

$$l \geq \frac{Q}{\frac{8}{3} r R \sqrt{\frac{R}{E}}} \quad (3)$$

emple, une réaction  $Q = 150.000^k$ ;  
fonte, et ont un coefficient d'élasticité

travail maximum admis pour la fonte est  
tre carré;

rouleaux  $2r = 0,200$ .

valeurs dans la formule 3 il vient :

$$\frac{l}{2r} = \frac{150.000}{392.000 \times 0,1} = 3^m,8.$$

à diviser cette longueur par le nombre  
avoir la longueur.

n coefficient de travail  $R = 6$  kilos par  
coefficient peut être élevé sans inconvé-  
dans les rouleaux en fonte.



.

PRE

—

MI

—

*niles*

*nt,*  
*rra,*





## ITRE QUATRIÈME

### ES MÉTALLIQUES

#### § 1

#### PORTÉS PAR LES PILES

1 sont soumises à des efforts de deux

x ou les charges ;

aux du vent.

1 forces intérieures engendrées par ces  
ule la résistance des pièces d'une pile  
étallique se compose en général de  
*arbalétriers* constituant quatre faces  
elles que toute section horizontale de  
le allongé dans le sens transversal au

réunis par des barres de treillis et par  
ituent de véritables poutres encastrées  
s à l'autre.

alisé par la charge et par des amarra-  
t insuffisante pour s'opposer au ren-

comprennent :

.ers ;

e treillis ;

tabilité ;

res.

Enfin il peut être intéressant de connaître une pile sous l'action du vent et nous en ferons le calcul.

Nous examinerons d'abord l'influence de

## § 2

### CHARGES VERTICAL

La charge verticale en une section  $mn$  est égale à :

$$T + ph'$$

$T$  étant la charge du tablier porté par la pile ;  
 $p$  le poids par mètre courant de pile ;  
 $h'$  la hauteur de la partie de la pile si section.

Considérons une pile (fig. 130) constituée par des barres de treillis et par des entretoises. Les efforts de compression le système se divise en deux (fig. 131 et fig. 132), l'un par les entretoises, et l'autre par l'ensemble des barres

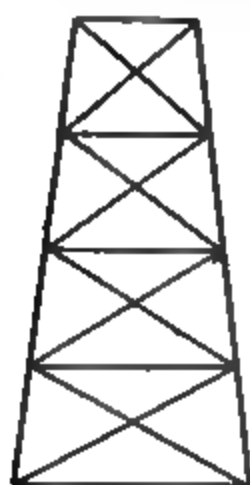


Fig. 130

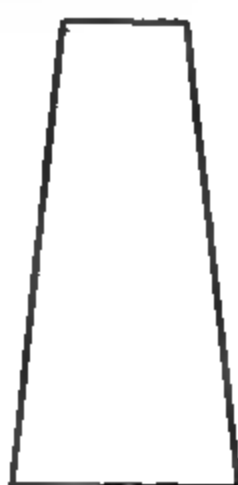


Fig. 131

entretoises. Il est nécessaire de connaître la charge portée par chacun des systèmes. Cette répartition ne peut se faire que par l'étude des déformations qui doivent être les mêmes dans les

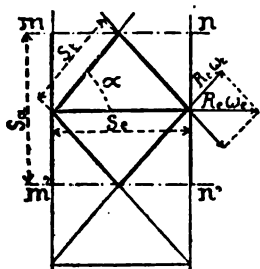


Fig 133

Supposons que les arbalétriers soient verticaux ; l'étude sera plus simple et les conclusions seront sensiblement les mêmes que si les arbalétriers étaient légèrement inclinés comme c'est généralement le cas.

Considérons (fig. 133 la portion de la pile située entre les sections  $mn$  et  $m'n'$  menées par deux croisements consécutifs des barres de treillis, et désignons

par :

- $R_a$  le coefficient de travail des arbalétriers ;
- $R_t$  » » des barres de treillis ;
- $R_e$  » » de l'entretoise ;

par

- $\omega_a$  la section d'un arbalétrier ;
- $\omega_t$  » d'une barre de treillis ;
- $\omega_e$  » d'une entretoise ;

par  $s_a$ ,  $s_e$ ,  $s_t$ , les longueurs des pièces indiquées dans la figure ;

par  $\alpha$  l'angle des barres de treillis avec l'horizontale.

Le raccourcissement de l'arbalétrier  $mm'$  est égal à :

$$\frac{R_a s_a}{E}$$

Le raccourcissement d'une demi-barre de treillis :

$$\frac{R_t s_t}{E}$$

L'allongement d'une entretoise :

$$\frac{R_e s_e}{E}$$

Dans le premier système, le déplacement vertical d'une section  $mn$ , par rapport à l'autre section  $m'n'$ , est égal au raccourcissement des arbalétriers  $\frac{R_a s_a}{E}$ . Dans le second système il se

#### CHAPITRE IV — PILES MÉTALLIQUES

duit des déformations des treillis et de l'angle  $\alpha$  :

$$\frac{2 R_t s_t}{E \sin \alpha} + \frac{R_o s_o}{E \lg \alpha}$$

Egalons les déplacements verticaux dans les deux cas :

$$R_o s_o = \frac{2 R_t s_t}{\sin \alpha} + \frac{R_o s_o}{\lg \alpha}$$

Nous avons entre les efforts des barres de l'entretoise la relation

$$R_o \omega_o = 2 R_t \omega_t \cos \alpha \text{ (Voir fig. 13)}$$

d'où :

$$R_o = \frac{2 R_t \omega_t \cos \alpha}{\omega_o}$$

$$R_t = \frac{R_o \omega_o}{2 \omega_t \cos \alpha}$$

En introduisant ces valeurs dans la formule

leurs  $s_t = \frac{s_o}{2 \sin \alpha}$ ,  $s_o = \frac{s_o}{\lg \alpha}$ , il vient :

$$R_o = \frac{R_o}{\frac{\omega_o}{2 \omega_t \cos \alpha \sin^2 \alpha} + \frac{1}{\lg^2 \alpha}}$$

$$R_t = \frac{R_o}{\frac{2 \omega_t \cos \alpha}{\omega_o \lg^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}}$$

Pour  $\alpha = 45^\circ$  et pour  $\omega_o = \omega_t$ , ce qui est le cas de la vérité :

$$R_o = 0,41 R_a$$

$$R_t = 0,50 R_a$$

Prenons deux autres angles, qui peuvent être les mêmes limites :  $\alpha = 60^\circ$  et  $\alpha = 30^\circ$ .

On trouve, pour  $\alpha = 60^\circ$ ,  $R_o = 0,60 R_a$  et  $R_t = 0,41 R_a$   
pour  $\alpha = 30^\circ$ ,  $R_o = 0,19 R_a$  et  $R_t = 0,41 R_a$

ICALI

a char  
de ce  
P' do

$R_t \omega_t$

iers :

$\omega_a R_a$

$\alpha$   
-

onne é

is val

= 0,02

= 0,06

= 0,00

ue no

à 3<sup>e</sup> {

form

travail

r de c

arbal

e calc

treilli:

axim

les eff

oujou

balétr

efforts

4° Pour réduire autant que possible les efforts engendrés dans les treillis, on tiendra les proportions suivantes :

L'angle  $\alpha$  sera peu différent de  $45^\circ$ .

L'inclinaison de  $45^\circ$  est d'autre part l'inclinaison la plus favorable à la résistance au vent.

La section  $\omega_e$  des entretoises sera aussi l'équivalente, relativement à la section  $\omega_t$  des treillis. Nous avons vu dans nos calculs  $\omega_e = \omega_t$  ; c'est le maximum qu'on donne à  $\omega_e$ . Dans beaucoup de cas on peut diminuer la section  $\omega_e$  et abaisser ainsi la valeur de R au rapport  $\frac{\omega_e}{\omega_t}$ .

5° Il y a tout intérêt à réduire autant que possible l'effort de la charge transmise par les treillis aux poutres que les arbalétriers à transmettre des

### § 3

#### EFFORTS ENGENDRÉS PAR LE VENT

(Planche 11)

Les efforts du vent sont ceux qui agissent sur la pile, sur la pile elle-même et sur le tablier qui passe sur le viaduc.

Nous avons vu que pour les viaducs des poutres on considère en général deux cas, celui d'un vent carré sans surcharge sur le tablier, et celui d'un vent carré avec surcharge sur le tablier.

L'évaluation des surfaces offertes au vent se fait comme cela est indiqué page 16. Pour les poutres on fait de la même manière, en comptant la surface offerte par le vent et la seconde face avec le vent réduite. Mais les deux faces sont en général exposées à la base, et, pour peu que le vent soit légèrement oblique à la direction perpendiculaire à l'axe du viaduc, les faces des treillis des faces transversales.

es deux influences, nous admettons  
ces offrent leur surface complète  
ite pour la seconde face.

la méthode de détermination des  
Pl. 44, pour le cas d'un vent de

les suivants : l'effort 1 est celui qui  
orts 2 à 7 ceux qui agissent sur la  
s horizontales.

$$\begin{array}{r}
 = 54.000^k \\
 = 4.400 \\
 = 10.000 \\
 = 10.000 \\
 = 10.000 \\
 = 10.000 \\
 = 10.000 \\
 = 6.000 \\
 \hline
 104.400^k
 \end{array}$$

ensemble des deux faces.

ouble et, pour déterminer les forces  
cillis double est décomposé en deux  
fig. 2, qui, à cause de leur symétrie,  
lié des efforts.

et faite pour le système de la fig. 2,  
itié des efforts.

ons qui coupent les 5 panneaux de  
s la force extérieure agissant dans  
est-à-dire la somme des efforts agis-

culaire, tracé au moyen du polygone  
ne la position de toutes les forces  
longer le côté du polygone funica-  
on jusqu'au dernier côté. Les points  
i obtenus et entourés d'un cercle,  
des forces extérieures. La gran-  
née par le polygone des forces où  
s efforts agissant au-dessus de la



#### TRE IV -

eures a,  
e sectic  
uivant .  
e pour l  
à la soi  
décom  
eillis) e  
s arbalé  
ur en d

nsi pour  
ces du  
nstruct  
s efforts  
signe co  
-à-dire  
ue à ce

les deux  
à  $Q+Q'$   
un effor  
ar le ver

orts agi  
:  $Q +$   
s. Il es  
horizo  
ont ann  
oir que  
directio  
nstituer  
lis sont  
anneau  
ngeme

insi à  
l'indiq  
seuse q

aires, jusqu'à 60 mètres, la forme  
référéable, parce qu'elle est plus  
exécution.

que les arbalétriers ont une forme  
les treillis sont soumis en cha-  
le compression résultant du chan-  
ts dus aux charges.

#### § 4

### CUL DES AMARRAGES

une pile, il suffit de composer la  
ges, comprenant le poids du ta-  
et le poids de la pile, avec la  
forts du vent : si cette résultante  
e la pile, celle-ci n'est pas stable ;  
se renversera pas sous l'action

re, la résultante des efforts du  
force extérieure de la section 3,  
le entière. La charge est la sui-

$$\begin{array}{r} \dots 175.000^k \\ \dots 148.000 \\ \hline 323.000^k \end{array}$$

efforts est tracée dans l'épure ;  
u point B de rotation.  
arbalétrier opposé est égal à :

$$\frac{\times 6,5}{1} = 170.000^k.$$

B à l'arbalétrier opposé.  
d'arbalétrier sera de ;

$$\frac{1}{2} = 85.000^k.$$

La section de l'amarrage doit être à effort et le cube de maçonnerie intéressé c'est-à-dire supérieur à l'effort de tra 2 n'est pas exagérée, c'est-à-dire qu' maçonnerie auquel conduira le calcul admettant pour la maçonnerie une den

$$\frac{2 \times 85.000}{2500} = 68 \text{ m}^3 \text{ par ar}$$

### § 5

## DÉFORMATION

(Planche 9)

Les piles métalliques se déforment :

- 1° Sous l'action des charges verticale
- 2° Sous l'influence d'un changement
- 3° Sous l'influence du vent.

#### a. — Déformations ver

Les déformations qui sont dues aux la température sont verticales, elles n hauteur de la pile.

Lorsque la pile porte un tablier con voisines ont des hauteurs différentes, cales donnent lieu à des dénivellations coup exagéré l'influence de ces déniv très peu, comme nous allons le voir, l tres continues.

Prenons l'exemple d'une pile de 50<sup>m</sup>, des travées de 55<sup>m</sup>,00 reposant à leur des appuis en maçonnerie.

Le travail des arbalétriers de la pile charge est de 2<sup>ton</sup> en moyenne. L'abais donné par la formule

$$\Delta h' = \frac{50 \times 2}{16.000} = 0,00$$

16.000 étant le coefficient d'élasticité p

ment de température de 30° au-dessous de celle  
donne un abaissement du sommet de la pile

$$\Delta h' = 50 \times 30 \times 0,000.012 = 0,018,$$

et la variation de longueur pour 1 mètre et

ent total de la pile est :

$$\Delta h = \Delta h' + \Delta h'' = 0,0242.$$

la moyenne de la poutre correspondent les va-

$$I = 0,418$$

$$\frac{I}{v} = 0,167.$$

à chercher quelle est la charge qui, placée au  
poutre considérée avec sa portée double, de  
, donne un abaissement égal à celui que nous  
le 0<sup>m</sup>,0242.

approximative qui donne la flèche en fonction  
et pour une section constante :

$$f = \frac{Pl^3}{48 EI}$$

$$E = 16 \times 10^9, \quad I = 0,418, \quad f = 0,024;$$

$$= \frac{48 \times 16 \times 10^9 \times 0,418 \times 0,024}{110^3} = 5.800^k$$

fléchissant correspondant est

$$M = \frac{5800 \times 110}{4} = 159.500$$

et de travail correspondant

$$R = \frac{159.500}{167.000} = 0k,95 \text{ par m}^2/\text{m}^3$$

nt, relativement faible, peut être considéré



polygone funiculaire avec la distance polaire variable au point de rotation. Computation nous prendrons (voir page 154 : treillis) un moyen situé au milieu de l'arbalétrier opposé à se déforme.

À symétrie de la construction, les deux arbalétriers déplacements identiques, il suffira donc de donner l'un d'eux ou de doubler les poids  $\frac{R_s}{E}$ .

Il a été fait dans la pl. 9. La fig. 5 est le polygone funiculaire donnant les déplacements. Les poids sont appliqués aux points de jonction des panneaux. Nous donnons ci-dessous les valeurs calculées pour les différents panneaux.

Coefficient de travail $R$	$E$ par $m/m^2$	$\frac{2sR}{E}$
3,2 par $m/m^2$	16.000	0,0040
3,2	»	0,0040
3,0	»	0,00375
3,0	»	0,00375
3,0	»	0,00375

$s$  est constante et égale à  $10^3$ .

Les  $\alpha$ , qui servent de distances polaires, sont indiqués sur la fig. 4.

L'angle au sommet de la pile est de  $45^\circ$  pour les membrures.

Les déformations sont obtenues en vraie grandeur : il suffit de porter dans le polygone des forces les  $\frac{2sR}{E}$  en valeur absolue et les  $\alpha$  à l'échelle du dessin.

Les déformations engendrées par les barres de treillis sont calculées autour du point de rencontre A des arbalétriers, et ont pour expression :

$$\Delta\delta = \frac{s'R'}{E\alpha'} \quad (\text{voir page 152})$$

# ITRE I'

t la dis  
s.  
re de  
ctemen  
onstru  
e cela  
dans  
is hor.  
base de

les dé  
u poin  
s expre

des
0
0
0
0
0

et égal

nts à la  
, fig.  
le ces  
. Ces r  
es poi  
ésente  
ontaux  
er à ce  
nents l  
obtenu

nt des arbalétriers et des treillis a  
n a obtenu ainsi la ligne désignée  
« totales ».

léplace de 66<sup>mm</sup> sous l'action d'un  
ment est, comme on le sait, pro-  
ent.

s déformations il y a lieu de tenir  
ux couvre-joints des arbalétriers ;  
compte du rapport entre le poids  
s arbalétriers. Ce rapport étant de  
sidérons, le déplacement au som-

$$\vdash 21 = 63 \text{ m/m}.$$





## CHAPITRE CINQUIÈME

---

### RES DE GRAVITÉ

#### PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

#### ELLIPSE, FIBRE NEUTRE, NOYAU CENTRAL

1.

*ier degré*

*d degré. Moments d'inertie et moments centri-*

*, des axes parallèlement à eux-mêmes*

*es moments du second degré résultant d'une ro-*

*giration. Ellipse d'inertie. Ellipse centrale d'i-*

*, antipolaire*

*inertie de quelques figures simples*

*'inertie d'une section de poutre composée*

*ion des moments d'inertie par la méthode de*

*au central,*



## E CINQUIÈME

### DE GRAVITÉ

#### DEGRÉ ET DU SECOND DEGRÉ DES D'INERTIE — NOYAU CENTRAL

##### § 1.

### DE GRAVITÉ

longueur  $l$ , fig. 134, ou une figure  
 en un groupe d'éléments  $\Delta F$  d'une  
 en des points déterminés fig. 136.  
 ce en éléments infiniment petits,  
 par des poids qui leur sont pro-  
 s par *centre de gravité*  $S$  de l'une  
 age de la résultante de tous ces  
 e quelle que soit la position de la

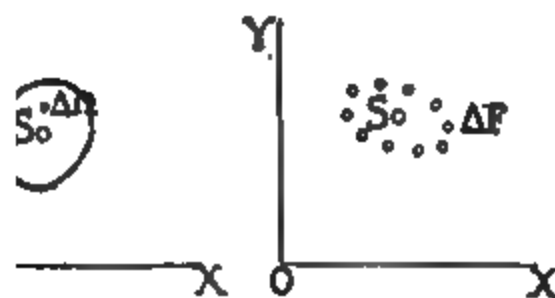


Fig. 135

Fig. 136

ion que le centre de gravité peut  
 igne, la surface ou le groupe d'é-

## CHAPITRE V — CENTRES DE GRAVITÉ

ments en petits éléments que l'on remplace par des éléments proportionnels, et en déterminant les poids pour deux directions différentes. Le point d'intersection des deux résultantes est le centre de gravité. On a ainsi une méthode générale pour la détermination des centres de gravité.

Pour les figures simples la détermination des centres de gravité se fait par des constructions spéciales. Voici quelques-unes :

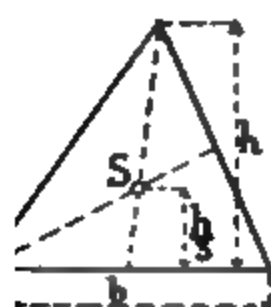


Fig. 137

**Triangle.** — Le centre de gravité se trouve au point d'intersection des médianes. Sa surface est égale à  $\frac{1}{2}bh$ .

$$\Omega = \frac{1}{2}bh$$

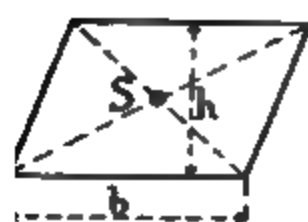


Fig. 138

**Parallélogramme.** — Le centre de gravité se détermine par l'intersection des deux diagonales. Sa surface est égale à  $\Omega = bh$ .

$$\Omega = bh$$

**Trapeze.** — Le centre de gravité d'un trapèze se détermine par la ligne EF par le milieu des bases.

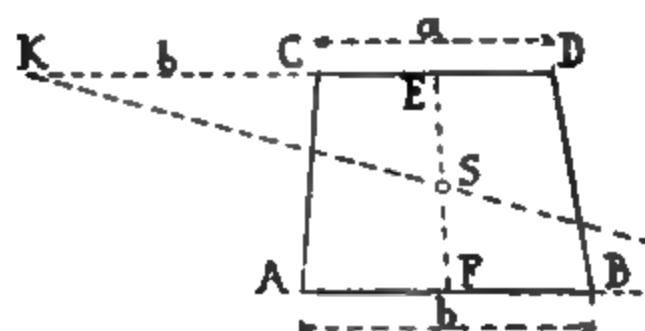


Fig. 139

On prolonge la grande base AB de la suite de la petite base a et à la suite de la petite base b.

base  $b$ . La rencontre de  $KH$  avec  $EF$  est le centre de gravité  $S$  du trapèze.

$S$  au-dessus de la base  $b$  est égale à :

$$y_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$$

$\Omega$  est égale à :

$$\Omega = \frac{a+b}{2} h.$$

*Quadrilatère.* — Le centre de gravité se construit de la manière suivante :

On mène les deux diagonales  $AC$  et  $BD$  qui se coupent en  $O$ .

On prend le milieu  $E$  de l'une des diagonales  $BD$  et l'on porte  $AO'$  égal à  $CO$  ; on mène  $EO'$ .

Le centre de gravité  $S$  se trouve sur la ligne  $O'E$  à une distance du point  $E$ . La surface est celle des

$$BCD ; \Omega = BD \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

*Arc de cercle.* — Le centre de gravité de cette ligne se trouve à une distance du centre  $O$  égale à :

$$OS = r \cdot \frac{c}{s}$$

$c$  étant la longueur de la corde,  $s$  la longueur de l'arc et  $r$  son rayon.

On construit facilement en portant  $BC'$  égal au demi arc, en joignant les points  $OC'$ , le à  $OB$  et  $C'S$  parallèle à  $BC'$ . Cette droite  $OS$  détermine le centre de gravité  $S$ .

Le centre de gravité de la surface d'un secteur est le même que celui d'un arc de cercle ayant le même







## CHAPITRE V — CENTRES

ue la fig. 145. La r  
 tre de gravité de la  
*avité d'une surface*  
 ste à décomposer le  
 centre de gravité en  
 it la position du ce  
 tres de gravité de  
 à leurs surfaces e  
 ntes les résultante  
 est le centre de gra  
 a un axe de symé  
 axe et il suffit de dé

l'une figure pour l  
 ité pourra toujours  
 : remplacer par des  
 aboles; ces élément  
 s avons donné la p  
 re que le nombre d  
 ontour est moins r  
 ns dans les figures

constru

Dans la

gale es

ments r



ces prop

élément

polygon

tracer

ayant, l

culaires

nd ses côtés parall

es R et R' se coupe

nd exemple, celui

e, nous n'avons trac

é divisée par des lig

ourbe du rail a été

en pointillé dans la

on peut se faire sans erreur sensible quand le nls est grand. Tous les éléments ont la forme e trapèzes, l'élément supérieur seul a été dé- tangle et en deux quarts de cercles.

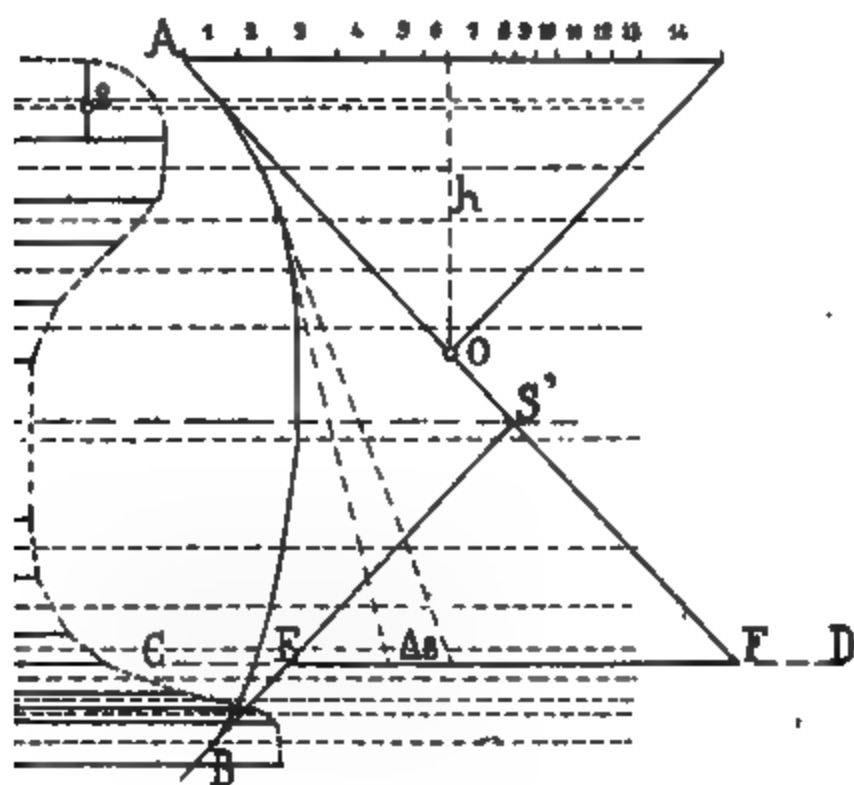


Fig. 147

3... 14 sont les centres de gravité des éléments 1. 2. 3... 14 du polygone des forces sont x surfaces des éléments. Les côtés extrêmes gonne funiculaire se coupent sur la ligne hori- t par le centre de gravité, qui se trouve ainsi il doit être sur l'axe de symétrie.

## § 2.

## CENTRES DU PREMIER DEGRÉ.

premier degré d'une figure relativement à tient en décomposant la figure en éléments et en faisant la somme des produits des éléments à la ligne OX. Ce moment est aussi

# CHAPITRE V — C

roduit de la figure  
 ar la distance de s  
 ions les trois figur  
 n groupe F d'élém  
 s des  $x$  et des  $y$  se

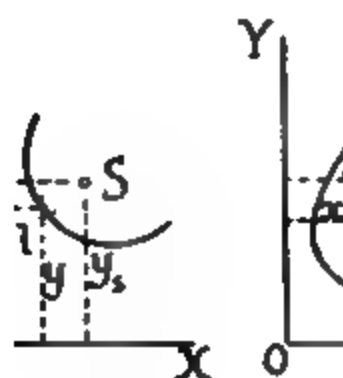


Fig. 148

port à l'axe des  $x$   
 ligne. . . . .  
 surface. . . . .  
 groupe d'éléments  
 S. . . . .

port à l'axe des  $y$   
 ligne. . . . .  
 surface . . . . .  
 groupe d'éléments  
 S. . . . .

gone funiculaire .  
 onne aussi les mo  
 llèles aux forces.  
 face du rail par ra  
 a segment EF inte  
 funiculaire. Si l'o  
 ut multiplier les  
 nir les surfaces de  
 oment sera égal

M

ent du premier d  
 par le centre de gi

## ITS DU SECOND DEGRÉ

ptés sur la ligne CD, entre deux  
ie funiculaire, sont proportionn  
par rapport à la ligne CD.

$$M = n . \Delta s . h.$$

### § 3

## DEGRÉ. MOMENTS D'INERT TS CENTRIFUGES.

ures 148 à 150, représentant  
groupe d'éléments, et divisons  
infinitement petits  $\Delta l$ ,  $\Delta \Omega$ ,  $\Delta F$ .  
degré sont donnés dans le table  
ar *moments d'inertie* quand ils  
et par *moments centrifuges* <sup>1</sup> que  
es.

	Surface	Groupe d'éléments
$d . y^2$	$I_x = \Sigma \Delta \Omega . y^2$	$I'_x = \Sigma \Delta F . y^2$
$d . x^2$	$I_y = \Sigma \Delta \Omega . x^2$	$I'_y = \Sigma \Delta F . x^2$
$d . x . y$	$J = \Sigma \Delta \Omega . x . y$	$J' = \Sigma \Delta F . x . y$

x axes sont perpendiculaires l'u

nts centrifuges est employée en allema.  
utre.

l'autre, la définition du moment centrifuge axes formant entre eux un angle quelconq

### I. Déplacement des axes parallèlement

Nous ne considérerons plus dans ce qui va venir  $\Delta\Omega$  et la surface  $\Omega = \Sigma\Delta\Omega$ , mais toutes les propriétés des moments du second degré aussi bien à des lignes et à des groupes de points. Désignons par  $O_1$  l'origine des nouveaux axes par  $-x_1$  et  $-y_1$  les coordonnées du point de centre de gravité, par  $J''$  le moment centrifuge. On aura (fig. 151) :

$$\begin{aligned} I_x'' &= I_x + \Omega y_1^2 + 2y_1 y_s \Omega \\ I_y'' &= I_y + \Omega x_1^2 + 2x_1 x_s \Omega \\ J'' &= J + x_1 y_s \Omega + y_1 x_s \Omega + \end{aligned}$$

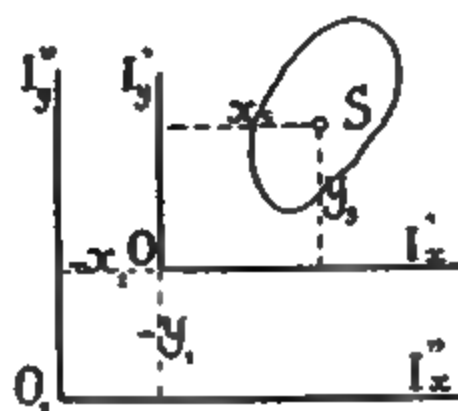


Fig. 151

Les moments plus employés se rapportent à des axes passant par le centre de gravité point  $O$  se confondant avec  $S$  et si l'on désigne les moments du second degré par rapport à des axes passant par le centre de gravité les formules deviennent (voir fig. 152) :

$$\begin{aligned} I_x'' &= I_x + \Omega y_1^2 \\ I_y'' &= I_y + \Omega x_1^2 \\ J'' &= J + x_1 y_1 \Omega \end{aligned}$$

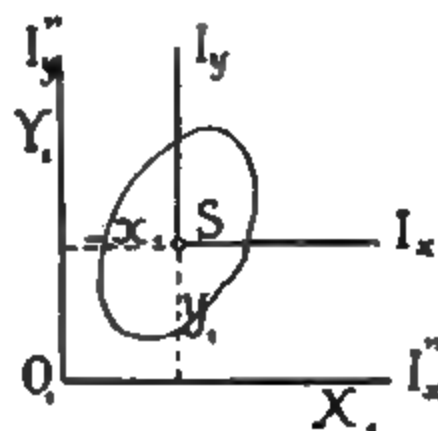


Fig. 152

des formules précédentes que les moments du second degré sont minimums pour les axes passant par le centre

**des moments du second degré pour une rotation des axes autour d'un point.**

Soient les moments d'inertie  $I'_x$  et  $I'_y$  et le moment centrifuge rapporté à deux axes perpendiculaires passant par un quelconque O (tableau page 207 et fig. 153). Le moment d'inertie relatif à l'axe OZ faisant avec l'axe OX un angle  $\alpha$  est égal à :

$$I'_z = I'_x \cos^2 \alpha + I'_y \sin^2 \alpha - 2J' \sin \alpha \cos \alpha \quad (7)$$

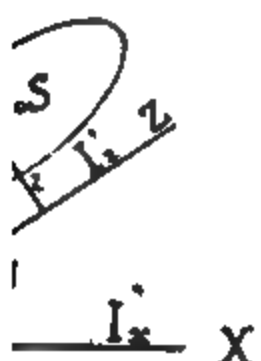


fig. 153

Ce moment d'inertie varie avec  $\alpha$  et il existe pour chaque point O un moment d'inertie maximum et un moment d'inertie minimum<sup>1</sup>. Les axes pour lesquels les moments d'inertie sont maximums et minimums sont les *axes principaux*. Ces deux axes sont perpendiculaires l'un à l'autre et leur position est donnée par

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J'}{I'_y - I'_x} \quad (8)$$

Le moment d'inertie rapporté aux deux axes principaux

est désigné par  $I'_{\max}$  et  $I'_{\min}$  le moment d'inertie maximum et par  $\beta$  l'angle que l'axe fait avec l'axe du moment d'inertie maximum, on a pour le moment d'inertie  $I'_z$  rapporté à ce nouvel axe

$$I'_z = I'_{\max} \cos^2 \beta + I'_{\min} \sin^2 \beta \quad (9)$$

On peut tracer un certain nombre de figures pour lesquelles  $I'_z$  est constant ; il est facile de voir que les moments rapportés à deux axes différents quelconques sont égaux. Telles sont le cercle, le carré, une section en croix à axes égaux, etc.

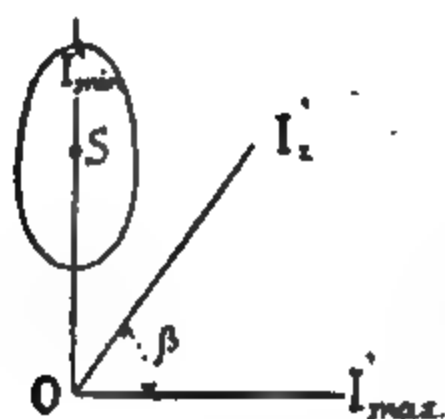


Fig. 154.

On peut aussi

$$I'_x + I'_y =$$

Tout axe de l'axe OS, par axes principaux.

### III. Rayon de giration. Ellipse d'inertie

*Rayon de giration.* — Le moment d'inertie par le produit :

$$I = \rho^2 \Omega,$$

$\Omega$  étant la surface de la figure.

$\rho$  est ce qu'on appelle le *rayon de giration*.

Si l'on remplace dans la formule (9) les expressions  $\rho^2 \Omega$ , il vient :

$$\rho^2 = \rho_{\max}^2 \cos^2 \beta + \rho_{\min}^2 \sin^2 \beta$$

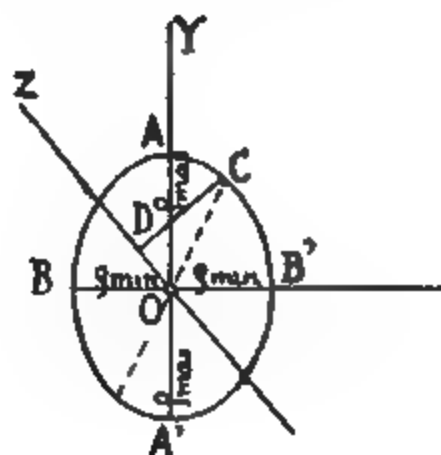


Fig. 155.

Si l'on prend comme axes des  $x$  et des  $y$  et si l'on porte sur l'axe des  $y$ ,  $OA = OA'$  des  $x$ ,  $OB = OB' = \rho_{\min}$ , l'ellipse construite comme axes est l'*ellipse d'inertie* (fig. 155).

1. Nous désignerons aussi le rayon de giration

Lorsque le point  $O$  se confond avec le centre de gravité  $S$  de la figure, l'ellipse devient l'ellipse centrale d'inertie.

Si l'on fait tourner l'axe du moment d'inertie autour du centre de l'ellipse d'inertie, les diamètres interceptés par l'ellipse sur l'axe sont inversement proportionnels aux rayons de giration.

Le moment d'inertie d'une figure relativement à un axe  $OZ$  (fig. 155), est égal au produit de la surface  $\Omega$  de la figure par le carré de la distance  $CD$  du point  $C$  à l'axe  $OZ$ , le point  $C$  étant l'extrémité du diamètre  $OC$  conjugué à l'axe  $OZ$ .

Le moment d'inertie relativement à un axe, l'axe des  $x$  par exemple, et le moment centrifuge relativement à deux axes, celui des  $x$  et celui des  $y$ , peuvent s'obtenir en concentrant une moitié de la surface totale de la figure à chacune des extrémités du diamètre conjugué à l'axe des  $x$  dans l'ellipse centrale.

Dans la figure 156, par exemple, le moment d'inertie relati-

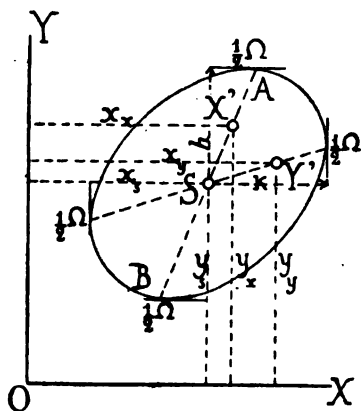


Fig. 156.

vement à l'axe des  $x$  et le moment centrifuge relativement aux deux axes peuvent s'obtenir en concentrant  $\frac{1}{2} \Omega$  en chacun des points  $A$  et  $B$ , extrémités du diamètre conjugué à la direction de l'axe des  $x$ .

Dans les applications que nous avons en vue, c'est toujours l'ellipse centrale d'inertie qui servira.



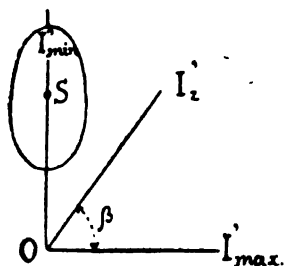


Fig. 154.

On peut aussi écrire :

$$I_x + I_y = I_{\max} + I_{\min} \quad (10)$$

Tout axe de symétrie comme l'axe OS, par exemple, est un des axes principaux.

### III. Rayon de giration. Ellipse d'inertie et ellipse centrale.

*Rayon de giration.* — Le moment d'inertie s'exprime souvent par le produit :

$$I = \rho^2 \Omega,$$

$\Omega$  étant la surface de la figure.

$\rho$  est ce qu'on appelle le *rayon de giration* <sup>1</sup>.

Si l'on remplace dans la formule (9) les moments d'inertie par les expressions  $\rho^2 \Omega$ , il vient :

$$\rho^2 = \rho_{\max}^2 \cos^2 \beta + \rho_{\min}^2 \sin^2 \beta \quad (11)$$

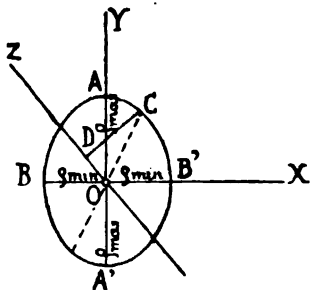


Fig. 155.

Si l'on prend comme axes des  $x$  et des  $y$  les axes principaux et si l'on porte sur l'axe des  $y$ ,  $OA = OA' = \rho_{\max}$  et, sur l'axe des  $x$ ,  $OB = OB' = \rho_{\min}$ , l'ellipse construite avec  $AA'$  et  $BB'$  comme axes est l'*ellipse d'inertie* (fig. 155).

1. Nous désignerons aussi le rayon de giration par la lettre  $r$ .

Lorsque le point  $O$  se confond avec le centre de gravité  $S$  de la figure, l'ellipse devient l'ellipse centrale d'inertie.

Si l'on fait tourner l'axe du moment d'inertie autour du centre de l'ellipse d'inertie, les diamètres interceptés par l'ellipse sur l'axe sont inversement proportionnels aux rayons de giration.

Le moment d'inertie d'une figure relativement à un axe  $OZ$  (fig. 155), est égal au produit de la surface  $\Omega$  de la figure par le carré de la distance  $CD$  du point  $C$  à l'axe  $OZ$ , le point  $C$  étant l'extrémité du diamètre  $OC$  conjugué à l'axe  $OZ$ .

Le moment d'inertie relativement à un axe, l'axe des  $x$  par exemple, et le moment centrifuge relativement à deux axes, celui des  $x$  et celui des  $y$ , peuvent s'obtenir en concentrant une moitié de la surface totale de la figure à chacune des extrémités du diamètre conjugué à l'axe des  $x$  dans l'ellipse centrale.

Dans la figure 156, par exemple, le moment d'inertie relati-

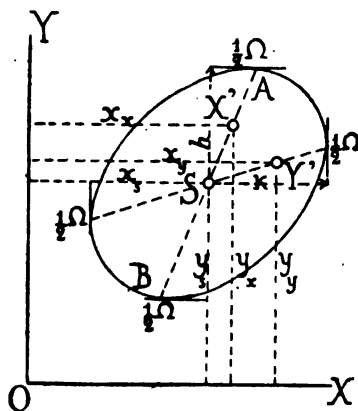


Fig. 156.

vement à l'axe des  $x$  et le moment centrifuge relativement aux deux axes peuvent s'obtenir en concentrant  $\frac{1}{2}\Omega$  en chacun des points  $A$  et  $B$ , extrémités du diamètre conjugué à la direction de l'axe des  $x$ .

Dans les applications que nous avons en vue, c'est toujours l'ellipse centrale d'inertie qui servira.

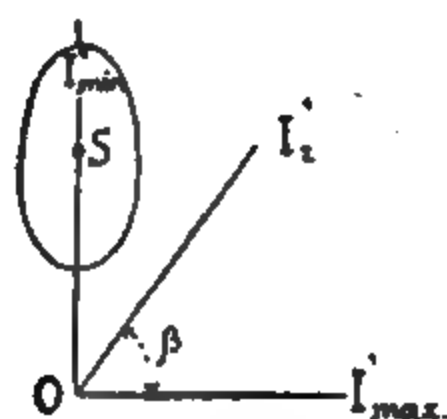


Fig. 154.

On peut aussi é

$$I'_x + I'_y =$$

Tout axe de  
l'axe OS, par ex  
axes principaux.

### III. Rayon de giration. Ellipse d'inertie et

*Rayon de giration.* — Le moment d'inertie par le produit :

$$I = \rho^2 \Omega,$$

$\Omega$  étant la surface de la figure.

$\rho$  est ce qu'on appelle le *rayon de giration*.

Si l'on remplace dans la formule (9) les  $x$  et  $y$  par les expressions  $\rho \cos \beta$  et  $\rho \sin \beta$ , il vient :

$$\rho^2 = \rho_{\max}^2 \cos^2 \beta + \rho_{\min}^2 \sin^2 \beta$$

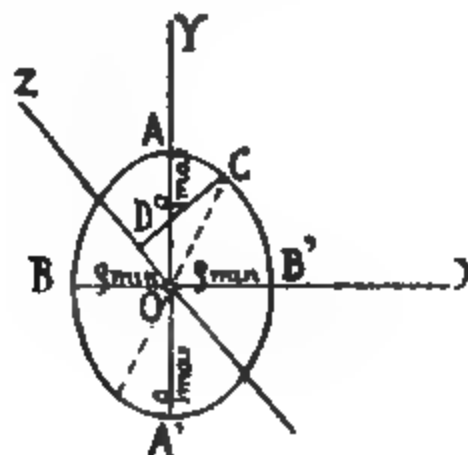


Fig. 155.

Si l'on prend comme axes des  $x$  et des  $y$  et si l'on porte sur l'axe des  $y$ ,  $OA = OA'$  ; sur l'axe des  $x$ ,  $OB = OB' = \rho_{\min}$ , l'ellipse construite comme axes est l'*ellipse d'inertie* (fig. 155).

1. Nous désignerons aussi le rayon de giration par

Lorsque le point  $O$  se confond avec le centre de gravité  $S$  de la figure, l'ellipse devient l'ellipse centrale d'inertie.

Si l'on fait tourner l'axe du moment d'inertie autour du centre de l'ellipse d'inertie, les diamètres interceptés par l'ellipse sur l'axe sont inversement proportionnels aux rayons de giration.

Le moment d'inertie d'une figure relativement à un axe  $OZ$  (fig. 155), est égal au produit de la surface  $\Omega$  de la figure par le carré de la distance  $CD$  du point  $C$  à l'axe  $OZ$ , le point  $C$  étant l'extrémité du diamètre  $OC$  conjugué à l'axe  $OZ$ .

Le moment d'inertie relativement à un axe, l'axe des  $x$  par exemple, et le moment centrifuge relativement à deux axes, celui des  $x$  et celui des  $y$ , peuvent s'obtenir en concentrant une moitié de la surface totale de la figure à chacune des extrémités du diamètre conjugué à l'axe des  $x$  dans l'ellipse centrale.

Dans la figure 156, par exemple, le moment d'inertie relati-

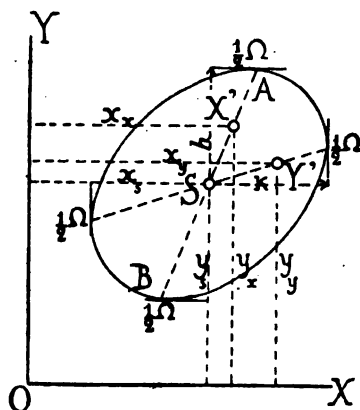


Fig. 156.

vement à l'axe des  $x$  et le moment centrifuge relativement aux deux axes peuvent s'obtenir en concentrant  $\frac{1}{2} \Omega$  en chacun des points  $A$  et  $B$ , extrémités du diamètre conjugué à la direction de l'axe des  $x$ .

Dans les applications que nous avons en vue, c'est toujours l'ellipse centrale d'inertie qui servira.

V —

$l'_{max.}$

ation

on. —

∴

ce de

ppelle

dans

$\rho^2 \Omega$

$\rho = \rho$

z  
B

mmé

r l'ax

$= \rho_m$

ellips

is aus

Lorsque le point  $O$  se confond avec le centre de gravité  $S$  de la figure, l'ellipse devient l'ellipse centrale d'inertie.

Si l'on fait tourner l'axe du moment d'inertie autour du centre de l'ellipse d'inertie, les diamètres interceptés par l'ellipse sur l'axe sont inversement proportionnels aux rayons de giration.

Le moment d'inertie d'une figure relativement à un axe  $OZ$  (fig. 155), est égal au produit de la surface  $\Omega$  de la figure par le carré de la distance  $CD$  du point  $C$  à l'axe  $OZ$ , le point  $C$  étant l'extrémité du diamètre  $OC$  conjugué à l'axe  $OZ$ .

Le moment d'inertie relativement à un axe, l'axe des  $x$  par exemple, et le moment centrifuge relativement à deux axes, celui des  $x$  et celui des  $y$ , peuvent s'obtenir en concentrant une moitié de la surface totale de la figure à chacune des extrémités du diamètre conjugué à l'axe des  $x$  dans l'ellipse centrale.

Dans la figure 156, par exemple, le moment d'inertie relati-

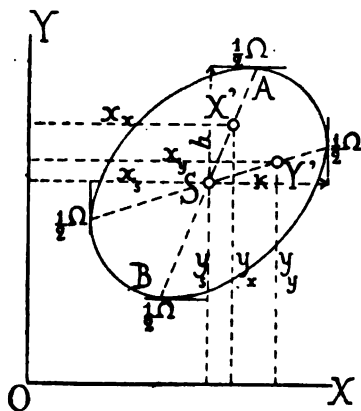


Fig. 156.

vement à l'axe des  $x$  et le moment centrifuge relativement aux deux axes peuvent s'obtenir en concentrant  $\frac{1}{2}\Omega$  en chacun des points  $A$  et  $B$ , extrémités du diamètre conjugué à la direction de l'axe des  $x$ .

Dans les applications que nous avons en vue, c'est toujours l'ellipse centrale d'inertie qui servira.

## CHAPITRE V — CENTRES DE GRA

### IV. Antipôle et antipolaire

On suppose d'abord que l'on désigne par rapport à une courbe du second degré, le point  $M$  des deux tangentes  $MB, MC$  à la courbe, où elle est coupée par une transversale passant par le point  $P$  (fig. 157). Ce lieu est appelé *antipôle* de la droite  $MP$  et les points de contact de la courbe sont les *antipolaires* du point  $P$ .

Si l'on prend le diamètre  $PO$ , passant par le centre  $O$  de la courbe, on a un système de diamètres conjugués. Le point  $P$  est appelé *pôle* de la droite  $MN$  et la droite  $MN$  est appelée *antipolaire* d'un point  $P$ , ou du second degré, la droite  $M'N'$ , passant par le point  $P$  par rapport au centre  $O$  est l'*antipôle* de la droite  $M'N'$ .

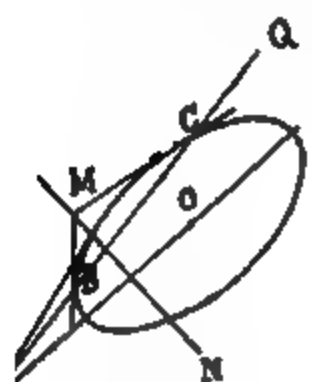


Fig. 157.



On désigne par  $X'$  l'antipôle de l'axe des  $x$ , et par  $Y'$  l'antipôle de l'axe des  $y$ , et par :

- les coordonnées du point  $S$ ;
- celles du point  $X'$ ;
- celles du point  $Y'$ .

Les définitions sont extraites de la Résistance des Matériaux.

Le moment centrifuge peut s'exprimer par :

$$\Sigma xy \cdot \Delta \Omega = y_s x_s \Omega = x_s y_s \Omega \quad (12)$$

*Le moment centrifuge rapporté à deux axes est égal au double produit de la surface par la distance de son centre de gravité à l'un des axes et par la distance à l'autre axe de l'antipôle de ce même axe relativement à l'ellipse centrale.*

*Le moment d'inertie d'une figure relativement à un axe, l'axe OX par exemple (Fig. 156), est égal au double produit de la surface de la figure par la distance  $y_s$  de son centre de gravité à l'axe, et par la distance  $y_x$  de l'antipôle X' à l'axe par rapport à l'ellipse centrale :*

$$I'_x = \Sigma y^2 \Delta \Omega = y_s y_x \Omega \quad (13)$$

Et de même :

$$I'_y = \Sigma x^2 \Delta \Omega = x_s x_y \Omega \quad (14)$$

L'antipôle d'une ligne se trouve sur le diamètre conjugué à sa direction.

La distance de l'antipôle Y' à l'axe des  $y$  est égale à :

$$x_y = \frac{k^2}{x_s} + x_s \quad (15)$$

La distance de l'antipôle X' de l'axe des  $x$  à l'axe des  $x$  est égale à :

$$y_x = \frac{h^2}{y_s} + y_s \quad (16)$$

Dans ces formules :

$k$  est la distance de la tangente parallèle à l'axe des  $y$  au centre de gravité;

$h$  la distance de la tangente parallèle à l'axe des  $x$  au centre de gravité.

La distance horizontale de l'antipôle Y' de l'axe des Y au centre de gravité S est égale à  $\frac{k^2}{x_s}$  ;



La distance verticale de l'antipôle  $X'$  de la direction  $Y$  au centre de gravité  $S$  est égale à  $\frac{h^2}{y}$ .

*Construction de l'antipôle d'une ligne.* — Soit  $Y$ , par exemple, se construit en se servant d'une droite  $YB$  parallèle à la direction  $Y$  et portant sur une verticale à partir du pôle  $B$  une longueur  $YB$  égale à  $k$ , et l'on construit le triangle rectangle  $AKB$  en portant  $AK$ , puis  $KB$  perpendiculaire à  $AB$ .

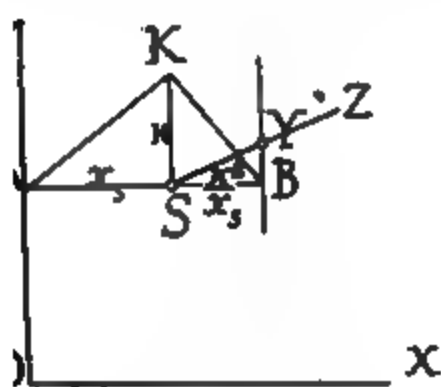


Fig. 159.

La verticale  $SZ$  est la direction  $SZ$  de la direction  $Y$  cherchée.

Dans le cas où  $Y$  est l'axe des  $y$  principaux, la construction se simplifie et le pôle se confond avec le pôle.

*Construction de l'antipolaire d'un point.* — L'antipolaire d'un point  $Y'$  se construit (fig. 159) en menant une ligne  $Y'B$  ayant la direction conjugée à  $Y'$ , et en traçant une droite  $SB$  perpendiculaire à  $Y'B$ , et en traçant un angle  $AKB$  ayant une hauteur  $SK$  égale à la distance de  $S$  à la direction  $Y'$ . La droite  $SK$  est l'antipolaire cherchée.

### V. Moments d'inertie de quelques figures

Nous donnons ci-dessous dans un tableau les moments d'inertie de quelques figures simples, ainsi que le moment d'inertie de l'ellipse centrale :

Moment d'inertie I	Diamètre de l'ellipse centrale
$I = \frac{bh^3}{12}$ <p>Axe passant par le centre de gravité.</p>	<p>Diamètre vertical :</p> $2 \frac{h}{\sqrt{12}} = 0,577h$ <p>Diamètre horizontal :</p> $2 \frac{b}{\sqrt{12}} = 0,577b$
$I' = \frac{bh^3}{3}$ <p>Axe sur la base.</p>	
$I = \frac{1}{36} bh^3$ <p>Axe passant par le centre de gravité.</p>	<p>Diamètre vertical :</p> $2 \frac{h}{\sqrt{18}} = 0,472h$ <p>Diamètre horizontal :</p> $2 \frac{b}{\sqrt{24}} = 0,408b$
$I = \frac{1}{12} bh^3$ <p>Axe sur la base.</p>	
$I = \frac{\pi r^4}{4} = 0,0491d^4$ <p>Axe passant par le centre de gravité.</p>	<p>r dans tous les sens.</p>
$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$ $= \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$ <p>Axe passant par le centre de gravité.</p>	<p>Dans tous les sens :</p> $\sqrt{R^2 + r^2}$

# VI. Moment d'inertie d'une section

Le moment d'inertie d'une figure qui est la somme des moments d'inertie des autres figures est la somme des moments d'inertie de ces autres figures. Cette propriété permet de déterminer le moment d'inertie d'une section complexe en la décomposant en plusieurs figures simples dont le moment d'inertie est connu.



Fig. 166.

Le moment d'inertie d'une figure qui est la somme des moments d'inertie des autres figures est la somme des moments d'inertie de ces autres figures. Cette propriété permet de déterminer le moment d'inertie d'une section complexe en la décomposant en plusieurs figures simples dont le moment d'inertie est connu.

$$I = \frac{bh^3}{12} + b_1 \frac{t^3}{12}$$

Nous avons indiqué la méthode pour déterminer graphiquement le moment d'inertie d'une section de poutre.

## I. Construction des moments d'inertie

Culmann. Pl. 12 et fig.

Pour construire le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe  $SS'$  (Fig. 167), on décompose la section en éléments de forme simple, on détermine le moment d'inertie de ces éléments par rapport à leur propre axe de symétrie et les antipôles de ces ellipses centrales de ces éléments.

On détermine les centres de gravité des efforts  $\Delta s' = \Delta s \cdot h'$ , et l'on construit un premier polygone funiculaire interne aux points  $\Delta s'$  que l'on applique aux axes  $SS'$ . On construit un deuxième polygone funiculaire  $CD$ . Soit  $h'$  la distance polaire qui sert à tracer le point  $\Delta s'$ , par  $h''$  celle qui sert à tracer le point  $\Delta s''$ , par  $s''$  la somme des  $\Delta s''$ , par  $s'$  la somme des  $\Delta s'$  interceptés sur l'axe  $SS'$  par le deuxième polygone funiculaire.

On représente la surface de la section par  $A$ , et  $h'$  le moment du premier degré de la section par rapport à l'axe  $SS'$ ;

$I = s''nh'h''$  est le moment d'inertie de la surface relativement au même axe.

On choisit en général pour  $h'$ ,  $h''$ ,  $n$  des nombres ronds pour faciliter les opérations.

Plus la figure est irrégulière, plus le nombre d'éléments sera considérable. Dans toutes les parties où la décomposition en rectangles ne se fait pas facilement, on donne aux éléments une faible hauteur; comme dans le profil de rail (fig. 167) où

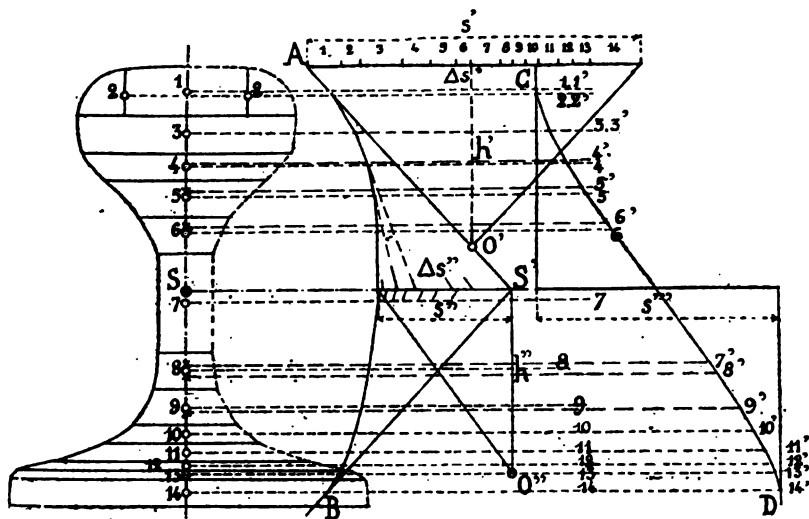


Fig. 167.

tous les éléments, excepté l'élément 7, sont très petits. Dans la section de la pl. 12, au contraire, la décomposition en rectangles est facile et elle se fait en 4 éléments.

Lorsque les éléments ont une faible hauteur et sont situés un peu loin de l'axe, l'antipôle se confond presque avec le centre de gravité et on se dispense de le déterminer. Si au contraire le centre de gravité d'un élément se trouve très près de l'axe, l'antipôle tombe très loin, et il est préférable dans ce cas de concentrer une moitié de la surface à chacune des extrémités du diamètre conjugué (voir page 211).

*Exemple de la planche 12.* — Dans la planche 12 nous avons construit les moments d'inertie principaux d'une section de

membrure. La section a été divisée en 4 éléments ayant les surfaces suivantes :

Elément 1	$0,500 \times 0,015 = 0,0075$
— 2	$0,090 \times 0,035 = 0,00315$
— 3	$0,215 \times 0,010 = 0,00215$
— 4	$0,400 \times 0,030 = 0,0120$

Dans le polygone des forces (fig. 2), on prend des longueurs proportionnelles à ces surfaces, on prend celles-ci par 0,500. Avec une distance polaire on a tracé le premier polygone funiculaire en prenant la position du centre de gravité S, puis comme plus haut une distance polaire  $h'' = 0,10$  on a servi à tracer le deuxième polygone funiculaire.

Les sommets de ce second polygone se trouvent sur des horizontales menées par les antipôles 1', 2', 3', 4' par rapport aux ellipses centrales des éléments.

Il va sans dire qu'il n'est pas nécessaire de tracer toutes ces horizontales ; il suffit pour l'élément 1, par exemple, de tracer la verticale SA1', l'étant la longueur de l'élément, le triangle rectangle SA1' (voir page 214).

Dans les éléments 3 et 4 l'antipôle se confond avec le centre de gravité.

La longueur  $s''$  mesurée entre les côtés du premier polygone funiculaire est égale à 0,0811 ; en prenant  $n = 0,50$ , par  $h' = 0,20$  et par  $h'' = 0,10$  on trouve le moment d'inertie.

$$I_{\max} = s'' n h' h'' = 0,0811 \times 0,5 \times 0,2 \times 0,1 = 0,000811$$

Le rayon de giration correspondant  $\rho_{\max}$  est donné par :

$$\rho_{\max} = \sqrt{\frac{s'' h' h''}{s'}}$$

Il se construit au moyen d'un arc de cercle dont le diamètre est égal à  $s'' + \frac{h' h''}{s'}$  et d'une verticale passant par le milieu de ce diamètre. Les deux segments  $s''$  et  $\frac{h' h''}{s'}$  sont les projections des deux segments  $s''$  et  $\frac{h' h''}{s'}$  sur la verticale.

Le moment d'inertie minimum relativement au centre de gravité et le rayon de giration correspondant ont été trouvés :

g. 4, 5 et 6. On a conservé la même division comme tous les éléments ont leur centre de , les antipôles sont situés à l'infini, et ne es demi-surfaces ont été concentrées aux etc., extrémités des axes horizontaux des ellip- reste des constructions ne diffère pas de celles tie maximum.

is de giration  $\rho_{\max}$  et  $\rho_{\min}$  ont permis de itrale.

#### § 4

### NEUTRE, NOYAU CENTRAL.

le section  $mn$  d'une pièce soumise à un effort hors du centre de gravité  $S$  en un point  $C$ . uve à la fois un déplacement parallèlement à e rotation autour du point  $S$ . Le plan de la

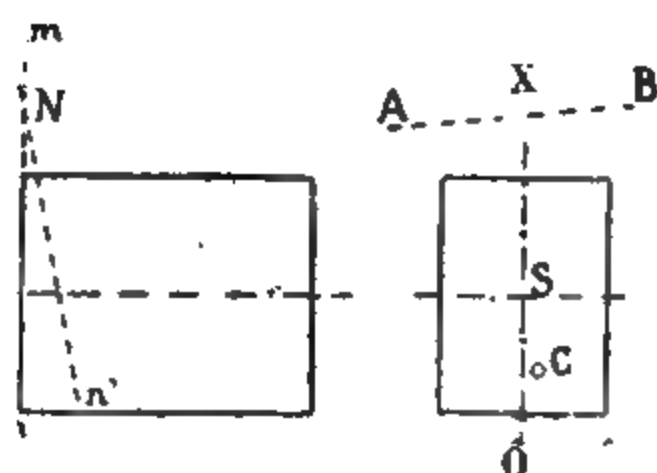


Fig. 168.

$m'n'$  coupe celui de la section primitive sui- } qui est l'antipolaire du point  $C$  relativement de la section. Lorsque la ligne  $AB$  rencontre les fibres coupées par cette ligne ne subis- et s'appellent *fibres neutres*.

fort  $Q$  agit dans le plan moyen  $OX$  et la ligne

AB est perpendiculaire à ce plan qu'elle rencontre en N. Le lieu des points N de toutes les sections qu'on appelle *la fibre neutre*.

Si l'on déplace la force Q sur une ligne passant par S, l'antipolaire se déplace parallèlement à elle et est à l'infini lorsque la force Q agit en S et revient au point S à mesure que la force Q s'en éloigne.

Lorsque la ligne AB ne coupe pas la section, toutes les parties de celle-ci sont soumises à des efforts du même signe ; dans le cas contraire la ligne AB est la ligne de séparation des deux parties de la section qui subissent des efforts de signes contraires.

Supposons que l'on fasse tourner la ligne AB autour d'un point fixe de la section de manière à envelopper celle-ci. À chaque position de la ligne AB correspond un point C qui est son pôle. Le lieu du point C est la surface comprise à l'intérieur de la figure engendrée. Ce point C est le *noyau central*. Il jouit de la propriété suivante : Toute force qui agit à l'intérieur du noyau central produit des effets du même signe dans toutes les parties de la section que des efforts de même signe.

Il résulte de la définition du noyau central qu'on peut le construire à l'aide de l'ellipse centrale au moyen des polaires.

Nous nous contenterons de remarquer qu'à chaque point du contour du profil correspond une droite polaire et à chaque droite polaire correspond un point du noyau central, et à chaque ligne droite du profil correspond une ellipse dans le noyau ; le profil et son noyau central sont des figures réciproques.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous le noyau central de quelques figures simples.

Ce noyau est la partie ombrée des figures.

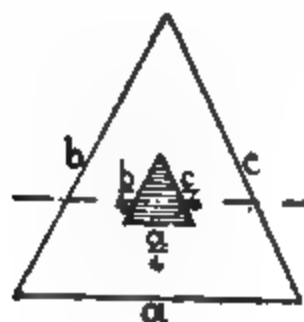


Fig. 169.



Fig. 170.



171.

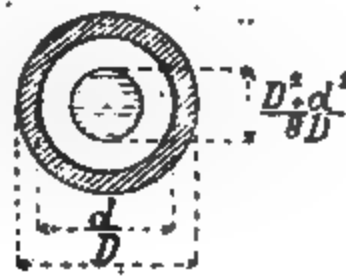


Fig. 172.

e toujours à considérer des pièces symétri-  
rts agissant dans le plan de symétrie; il n'est  
dans ce cas de construire le noyau central  
implement les deux points où l'axe de symé-

ans la fig. 173 une pièce ABCD, et une force  
sant sur la section AB dans le plan de symétrie  
pièce. S est le centre de gravité de la section  
ce de l'effort N au point S.

ar  $\Omega$  la surface de la section AB, par I le mo-  
de celle-ci relativement à l'axe horizontal, par  
ux points où l'axe vertical rencontre le noyau  
et  $k_1$  les distances de ces points au centre S, par  
ances des fibres extrêmes au centre.

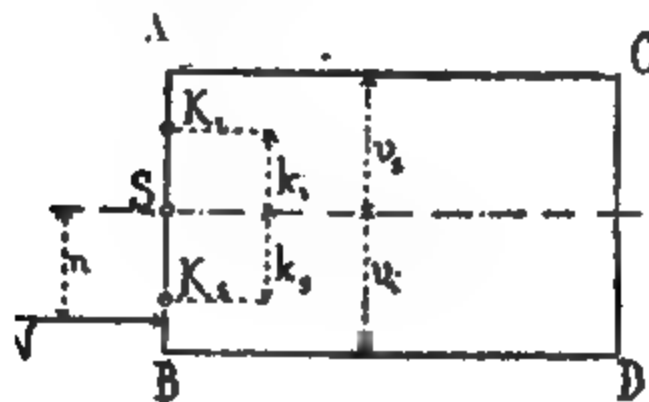


Fig. 173.

ort N agit au point  $K_1$ , le coefficient de travail  
fibre extrême supérieure :

$$k_1 = \frac{1}{v_1 \Omega}$$





## CHAPITRE SIXIÈME

---

### ARCS MÉTALLIQUES

ique, par M. W. Ritter : § 2 à 18

astique

un élément d'arc à paroi pleine

un point invariablement lié à un élément

un élément de treillis

e des arcs élastiques

: l'ellipse centrale d'un arc à paroi pleine

: l'ellipse centrale d'un arc à treillis

ction des réactions et ligne enveloppe des réactions

e la courbe d'intersection et de la courbe enveloppe

articulation

e la ligne des intersections d'un arc à deux articu-

rables des arcs à paroi pleine

rables des arcs à treillis

changement de température

: sans articulation, Pl. 13

: à deux articulations sur les appuis, Pl. 14

natif d'un arc sans articulation

natif d'un arc à articulations sur les appuis

d'un arc à deux articulations et à paroi pleine. Pl.

c à trois articulations. Pl. 17

nt sur les arcs.



## CHAPITRE SIXIÈME

### ARCS MÉTALLIQUES

#### § 1

#### INTRODUCTION

En général, les arcs en trois systèmes, suivant la articulation, à deux articulations ou à trois. De plus, les arcs de chacun de ces systèmes affectent des formes variées ; celles qu'on emploie le plus souvent sont représentées dans les figures qui suivent.

*Articulations.* — Les arcs sans articulations reposent sur des surfaces d'appui. En pratique, il est bien difficile d'obtenir le contact complet sur ces surfaces, et il y a une grande incertitude dans la répartition des pressions sur les appuis ; la moindre déformation reporte tout le poids sur une des extrémités de la surface de contact. Les variations de température développent dans les arcs des efforts très considérables, et ces efforts sont d'autant plus grands que la flèche est plus petite. En résumé, nous pensons qu'il est toujours préférable de faire recourir aux arcs articulés ; on est plus sûr de la résistance et on évite les efforts.

Les arcs articulés ont, en général, comme l'indiquent les figures, une épaisseur plus grande aux naissances qu'à la

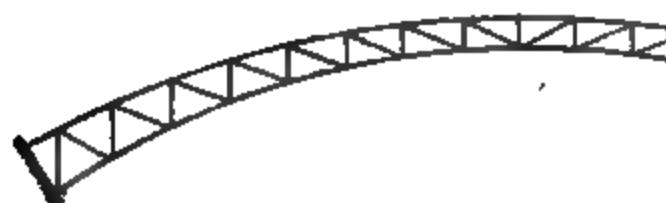


Fig. 174.

**Arcs à deux articulations.** — L'appui aux deux extrémités sur ces articulations, toujours les réactions.

Les différentes formes d'arcs à deux articulations :

La figure 175 représente un arc à tyn



Fig. 175.

pour des portées qui ne dépassent pas 80 m. ont en général une hauteur très-faible à l'aspect de grande légèreté. Les variations de la hauteur de l'arc sont telles que l'arc soit élastique ; or, comme les appuis présentent une grande hauteur relativement grande de l'arc, la flexion se produit dans la partie centrale tant plus faibles que la hauteur de l'arc. La réduction de la hauteur à la clef est cependant telle que les moments fléchissants engendrés par l'arc d'Arcole, à Paris, qui a 80 m de portée, la hauteur de la clef n'est que de 0,400. On fera bien de donner cette dimension, et de donner environ la même hauteur à la clef.



Fig. 176.

176, 177, 178 représentent des arcs sans tympan surbaissé, plus on réduit sa hauteur à la clef. La figure 176 s'applique avec avantage aux arcs très



Fig. 177.

celle de la figure 177 aux arcs de flèche moyenne et de la figure 178 aux arcs de grande flèche.

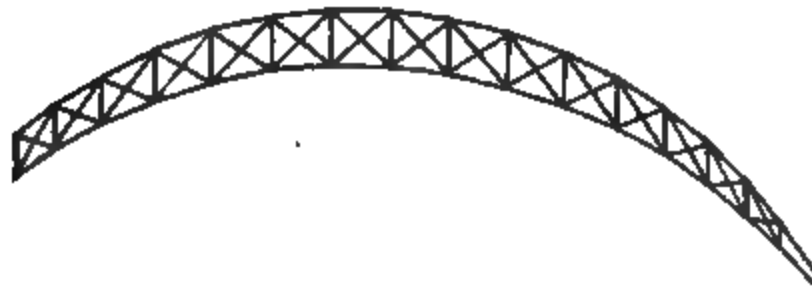


Fig. 178.

Pour faire construire un arc à membrures constantes partout le même effort maximum, on serait conduit de la figure 179. Pour toutes les autres formes, on ne peut pas aller d'un point à un autre de l'arc.



Fig. 179.

Un arc à deux articulations sans tympans se prête à toutes les portées ; il est à paroi pleine ou à treillis suivant que la flèche est plus ou moins grande. Lorsque les parois sont pleines, on a les formes des figures 176 et 177 qui sont généralement adoptées.

## CHAPITRE VI — ARCS MÉTALLIQUES

**Arcs à trois articulations.** — Les ponts en arcs à trois articulations sont des arcs à trois articulations.



Fig. 180.

tous, celui qui laisse subsister la répartition des efforts. Les changements de longueur de la corde produisent un mouvement des maçonneries et un effort supplémentaire dans la corde.



Fig. 181

Sur les ponts pour routes, la hauteur des arcs est plus faible que dans les ponts de chemin de fer. L'acier y joue un rôle moins important. Les efforts fléchissants sont plus faibles. Cette

hauteur est plus faible dans les arcs à trois articulations qu'à treillis.

De manière générale, on peut dire que les ponts pour routes qu'aux ponts pour chemins de fer, tout pour les petites portées.

La forme qui convient le mieux aux arcs est celle qui donne les efforts les plus faibles. Si l'on suppose un arc complétement uniformément réparti, c'est pour les ponts les plus faibles.

Le montage des ponts en arcs sur les piliers est accentué surtout pour les grandes portées, les arcs ne se justifient que par l'économie de poids qui pourrait résulter si la réaction est compensée par la main-

que dans les poutres droites, et par la plus grande des culées.

Le rapport de la flèche à la portée de l'arc est tel que, si les arcs sont élastiques et plus les déplacements sont grands, tant sous l'action des charges que sous l'influence de la température. Nous considérons la dernière limite de ce rapport, qui ne descend en général pas en dessous de  $\frac{1}{15}$ . Nous mesurons la flèche de la ligne des appuis moyenne.

Les premiers systèmes se calculent par la théorie de cette théorie, développée dans les § 2 à 18, est la théorie de l'ouvrage de M. W. Ritter, professeur à l'école technique de Zurich (der elastische Bogen), *L'arc élastique*. Nous avons ajouté une épure complète des efforts et des déplacements d'un arc à paroi pleine (§ 19).

## § 2

### DÉFORMATION ÉLASTIQUE

Il ne peut se faire seulement par la statique, mais avoir recours aux lois de l'élasticité. L'arc à trois points fait seule exception ; sa ligne de pression passe par les points fixes et les réactions qui correspondent à une charge unitaire se déterminent facilement par les lois de l'é-

quilibre. Si le nombre des articulations est inférieur à trois, les déplacements qui résultent de l'équilibre de la construction sont plus, et il faut alors étudier les déformations. Le point important dans cette étude (comme dans la poutre continue) est la fixité des appuis pendant l'action des forces extérieures. D'autres termes, la position relative des surfaces doit être invariable.

En premier lieu, on commence par admettre que l'une des ex-



trémités de l'arc est fixe, et l'on détermine l'autre extrémité sous l'influence d'une charge on applique à cette extrémité déplacée un déplacement qui ramène dans sa position primitive.

Lorsque l'arc n'a aucune articulation, il ne peut être ramenée parfaitement dans sa position nécessaire d'opérer, au moyen de la réaction d'un déplacement mais encore une rotation. L'appui déplacé est à articulation, un déplacement suffit ; la rotation que le point d'appui est maintenue.

Enfin, lorsque les deux appuis sont à articulation qui doit ramener l'appui dans sa position horizontale. Les déplacements sont toujours vement à la portée de l'arc et le déplacement qui mobile aura éprouvé, sera annulé en la somme de la construction autour de l'appui.

Nous ne traiterons que les deux cas d'arcs et d'arcs à deux articulations. On rencontre d'arcs ayant une seule articulation.

### § 3

#### DÉFORMATION D'UN ÉLÉMENT D'ARC À PAROI PLEINE

Tout d'abord il est nécessaire d'établir de quelle manière un élément d'arc se déforme sous l'action de forces données, et nous aurons à distinguer deux cas, suivant que l'arc sera à paroi pleine ou à treillis.

Nous commençons par le premier cas, celui d'un élément à paroi pleine.

La fig. 182 représente un élément d'arc situé entre deux sections C et C' infiniment rapprochées. La longueur de l'élément dans la direction de l'axe de l'arc est désignée par  $\Delta s$ . La surface de la section sera désignée par  $\omega$  et le moment d'inertie

l'axe horizontal du centre de gravité par I ;  
 ns que sur la longueur très petite  $\Delta s$ ,  $\omega$  et I

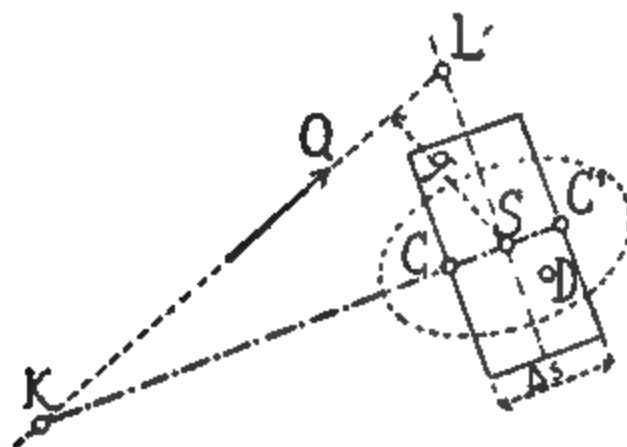


Fig. 182.

tion qu'éprouvera l'élément sous l'influence d'une force extérieure  $Q$  peut se déterminer simplement en décomposant d'abord cette force  $Q$  en un couple ou moment et en une force parallèle à  $Q$  et passant par le centre  $S$  de l'élément ; puis en décomposant à son tour la force qui passe par le point  $S$  en deux composantes, l'une située dans l'axe de l'élément, *normale*, et l'autre perpendiculaire à cet axe, *transversale*

Le moment est égal à :

$$M = Q \cdot q$$

La composante normale est  $N$  ;

La composante transversale, *effort tranchant*, est  $T$ .

Chacun de ces efforts et le moment auront sur l'élément une influence différente.

Le moment fera fléchir l'axe  $CC'$  qui, de droit qu'il était avant la déformation, prendra la forme d'un arc de cercle

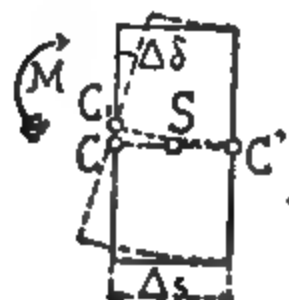


Fig. 183

$C_1C'$  (fig. 183). En même temps la section  $C$  tournera d'un angle  $\Delta\delta$  qu'il est facile de calculer. En effet : désignons par  $v$  la distance de la fibre extrême supérieure de la section au centre de gravité. Le raccourcissement de cette fibre ( $\Delta\delta$  étant très petit) sera  $v\Delta\delta$ , et l'on aura, en dési-

gnant par  $E$  le coefficient d'élasticité et  $\nu$  de travail :

$$\frac{r \cdot \Delta \delta}{\Delta s} = \frac{R}{E}$$

En introduisant la valeur :

$$M = \frac{Rl}{\nu}$$

il vient :

$$\Delta \delta = \frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot I} = \frac{Q \cdot q \cdot \Delta s}{E \cdot I}$$

Le point  $C$  s'élève par suite de cette rotation :

$$CC_1 = \frac{1}{2} \Delta s \cdot \Delta \delta$$



Fig. 184

La composante  $N$  agit sur la section en  $C$  (fig. 184); elle comprime sa longueur d'un peu; on peut s'exprimer en fonction de l'élasticité  $E$ , du rapp

$$CC_2 = \frac{N \cdot \Delta s}{\omega E}$$

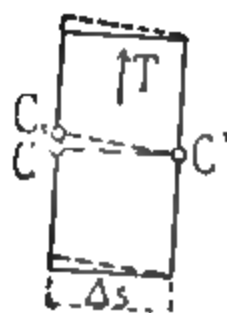


Fig. 185

Enfin l'effort tranchant agit transversalement d'une section à l'autre, comme l'indique la flèche  $T$ . Ce déplacement est fonction du coefficient d'élasticité transversale  $G$ , coefficient qu'il est très difficile de déterminer expérimentalement, mais qui, d'après des considérations théoriques, peut être admis égal à  $\frac{2}{5} E$ .

Le déplacement transversal pourra alors s'exprimer par :

$$CC_3 = \frac{T \cdot \Delta s}{G \cdot \omega} \quad (4)$$

En combinant tous ces déplacements de la section C et en supposant que la section C' soit fixe, on arrive au *déplacement total* qui n'est autre chose qu'une rotation autour du point D (fig. 182). Ce point D est l'antipôle de la force extérieure Q, relativement à une ellipse ayant comme petit axe le double du rayon de giration  $r$  de la section et comme grand axe  $2 \cdot r \sqrt{\frac{E}{G}}$ .

Désignons dans la fig. 182 les coordonnées du point D, rapportées au point S, par  $x_d$  et  $y_d$ , et par K et L les points d'intersection de la force Q avec les axes menés par le point S. Les propriétés des pôles et des polaires, en faisant abstraction des signes, donnent :<sup>1</sup>

$$x_d \cdot KS = r^2 \frac{E}{G} = \frac{E}{G} \cdot \frac{I}{\omega}$$

et

$$y_d \cdot LS = r^2 = \frac{I}{\omega}$$

Supposons que la force Q soit décomposée au point K en deux composantes N et T, et égalons le moment de la force Q autour du point S à la somme des moments des composantes N et T, nous aurons :

$$Qq = N \cdot 0 + T \cdot KS$$

$$KS = \frac{Qq}{T}$$

De même la décomposition de la force Q au point L donne :

$$Qq = N \cdot LS + T \cdot 0$$

ou

$$LS = \frac{Qq}{N}$$

1. Comparer avec les formules 13 et 14, page 213,  $2r \sqrt{\frac{E}{G}}$  étant le grand axe de l'ellipse.

Introduisant ces valeurs dans les expressions précédentes, il vient :

$$x_d = \frac{E.I.T}{G.\omega.Q.q} \quad y_d = \frac{I.N}{\omega.Q.q}$$

et en tenant compte de la formule (1)

$$x_d = \frac{T.\Delta s}{G.\omega.\Delta\delta} \quad y_d = \frac{N.\Delta s}{E.\omega.\Delta\delta}$$

Une rotation du point C autour du point D, de sorte que le déplacement horizontal du point C égal à

$$y_d . \Delta\delta = \frac{N.\Delta s}{E.\omega}$$

et un déplacement vertical

$$\left( \frac{1}{2} \Delta s + x_d \right) \Delta\delta = \frac{1}{2} \Delta s . \Delta\delta + \frac{T.\Delta s}{G.\omega}$$

La comparaison avec les formules (2), (3) montre que la rotation autour du point D donne les mêmes résultats que ceux que nous avons trouvés pour les forces extérieures Q.

L'ellipse de la figure 182 est facile à dessiner, car son grand axe est le même que l'axe vertical de l'ellipse précédente, et le grand axe est au petit axe dans le

rapport à 1, ou approximativement dans le rapport

Si l'on néglige, comme on le fait souvent, l'effet du frottement T, G devient  $\infty$ , l'axe horizontal de l'ellipse s'aplatit pour devenir une droite horizontale égale à  $2r$ . Le point D se trouve alors sur cette

## § 4

DÉPLACEMENT D'UN POINT INVARIABLEMENT LIÉ  
À L'ÉLÉMENT

Soit  $W$  invariablement lié à la section  $C$  et situé dans la figure, fig. 186, se meut en même temps que la

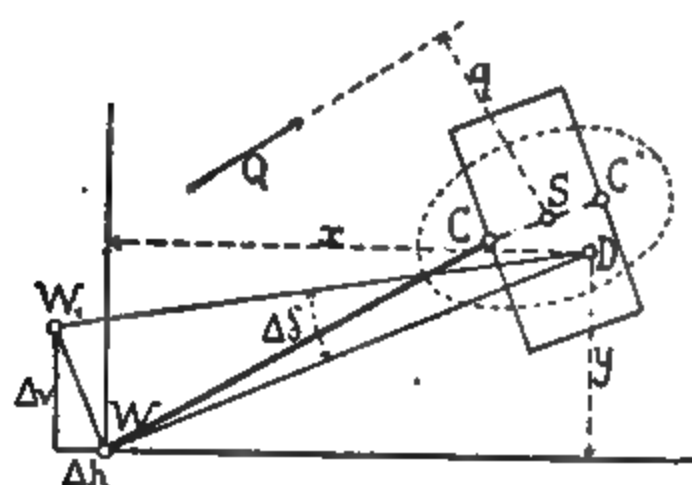


Fig. 186

décrit un arc de cercle  $WW_1$ , ayant son centre au point  $W$ . L'angle de rotation est comme précédemment

$$\Delta\theta = Q \cdot q \frac{\Delta s}{E \cdot I}$$

Prendons le point  $W$  comme origine, en faisant passer par ce point l'axe des  $y$  et l'axe des  $x$ . Les coordonnées du point  $D$  sont désignées par  $x$  et  $y$ , celles du point  $W_1$  par  $\Delta h$  et  $\Delta v$ . Nous aurons la relation

$$x : y : DW = \Delta v : -\Delta h : WW_1;$$

$$WW_1 = DW \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta v = x \cdot \Delta\theta = Q \cdot q \cdot x \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot I} \quad (5)$$

et

$$\Delta h = -y \cdot \Delta\theta = -Q \cdot q \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot I} \quad (6)$$

Ces deux expressions seront, avec la point de départ des développements qui suivent, une signification statique qu'il est facile de déterminer du théorème suivant, tiré de la théorie de l'inertie.

*Le moment centrifuge d'une figure plane, par rapport à deux axes quelconques, est égal au double du produit de cette figure par la distance de son centre de gravité à l'un des axes et par la distance de l'antipôle de ce centre à l'autre axe.*

Si l'on a une figure d'une surface ou d'un volume et ayant pour ellipse centrale l'ellipse des

$q \cdot \frac{\Delta_s}{E.I}$  est le moment statique de la figure par rapport à la direction Q.

$q \cdot x \cdot \frac{\Delta_s}{E.I}$  est le moment centrifuge de cette figure par rapport à la direction Q et à l'axe des y.

$q \cdot y \cdot \frac{\Delta_s}{E.I}$  est le moment centrifuge relatif de cette figure par rapport à l'axe des x.

On peut dire que la déformation de l'élément par une force extérieure Q fait tourner le moment lié à cet élément, et le déplace verticalement.

Si l'on suppose l'élément chargé d'un moment de rotation a pour expression le produit de la force Q et du moment centrifuge relatif de l'élément autour de l'axe de déplacements verticaux et horizontaux, on peut dire que le produit de la force Q et du moment centrifuge relatif de l'élément est égal au moment de rotation a.

Il est à peine nécessaire de dire que, par moment centrifuge, on entend ici non une expression physique, mais une expression mathématique. Il en sera souvent ainsi.

§ 5

DÉFORMATION D'UN ÉLÉMENT DE TREILLIS

Lorsque l'arc est à treillis, chaque allongement ou raccourcissement de l'une des pièces produit aussi une rotation; cette rotation se fait ou bien autour d'un nœud unique, ou bien autour de deux nœuds.

Si l'on fait dans la figure 187 une section CC' dans l'arc et

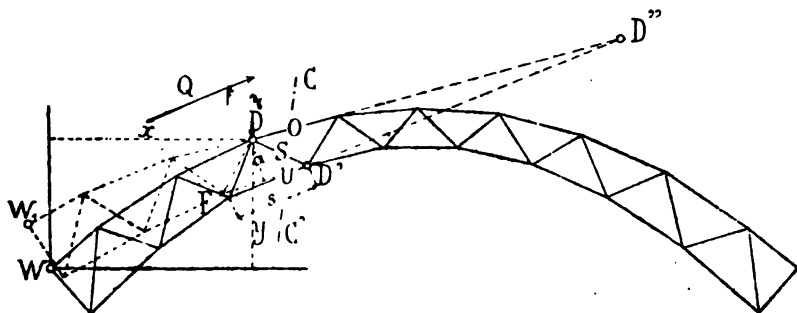


Fig. 187.

si l'on désigne de nouveau par  $Q$  la force extérieure, cette force extérieure se décompose en trois composantes suivant les directions des trois pièces coupées.

Considérons d'abord le nœud  $D$  où les pièces  $O$  et  $S$  se rencontrent. On sait que, pour un point quelconque, le moment de la force  $Q$  est égal à la somme des moments des composantes, et puisque au point  $D$  deux des moments sont nuls, nous aurons

$$Q \cdot q = U \cdot a$$

$q$  désignant la distance normale du point  $D$  à la force  $Q$ .

$a$  la distance de la pièce  $U$  au point  $D$ .

Désignons de plus par

$s$  la longueur de la pièce  $U$  ;

$\omega$  la section de cette pièce ;

$R$  le coefficient du travail de cette pièce.



## CHAPITRE VI — ARCS MÉTALL

Nous aurons :

$$R = \frac{U}{\omega}$$

L'allongement  $\Delta s$  de la pièce sera

$$\Delta s = \frac{s \cdot R}{E} = \frac{s \cdot U}{E \cdot \omega} = \frac{Q \cdot q \cdot s}{E \cdot \omega \cdot a}$$

Si la partie de la construction qui est si-  
tion CC' est fixe, la partie de gauche se  
pièce U se déformera ; elle tournera auto-  
188, et prendra la position indiquée en  
rotation  $\Delta \delta$  de la pièce DF, et par suite

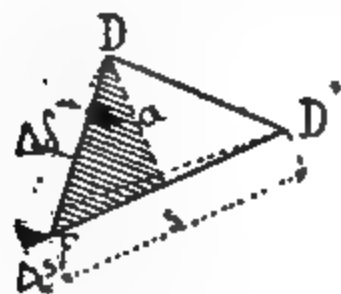


Fig. 188

tation de toute la p-  
construction se dé-  
suit :

La projection du  
du point F sur la dir-  
D'F donne un petit tri-  
la fig. 188. Ce petit

ble au grand triangle ombré compris  
idiculaire  $\alpha$ .

La similitude des deux triangles donne  
ite :

$$\frac{FF_1}{\Delta s} = \frac{DF}{a}$$

Et, les déformations étant très petites, en

$$FF_1 = DF \cdot \Delta \delta$$

ient :

$$\Delta \delta = \frac{\Delta s}{a}$$

ntroduisant la valeur trouvée plus haut  
is :

$$\Delta \delta = Qq \cdot \frac{s}{E \cdot \omega \cdot a^2} \quad (1)$$

Du arrive à un résultat analogue pour la pièce O de la fig.  
1, la rotation se fait autour du point D' où les deux autres  
ces coupées par la section se rencontrent.

La même formule s'applique également à un allongement ou à un raccourcissement de la barre de treillis ; si le point  $D'$  et toute la partie de la construction située à droite de ce point sont fixes, un allongement de la pièce  $DD'$  produit à la fois un déplacement des points  $D$  et  $F$ . Le premier déplacement du point  $D$  est indiqué par  $DD_1$  dans la fig. 189 ; c'est une rotation infiniment petite autour du point  $F'$  qui peut être considérée comme un déplacement perpendiculaire à  $DF'$ . Le second déplacement, celui du point  $F$ , se fait aussi suivant un arc de cercle, autour du point  $D'$  ; il est donc perpendiculaire à  $FD'$ . Ces deux rotations ne peuvent se produire en même temps que dans le cas où la pièce  $DF$ , et avec elle toute la partie de la construction située à sa gauche, tournent autour du point  $D''$  intersection des pièces  $U$  et  $O$ . Le point  $D''$  est donc le centre de rotation, et la rotation autour de ce point s'obtient comme précédemment. Projetons la petite longueur  $DD_1$  sur la ligne  $DD'$  : le petit triangle ombré dans la fig. 189

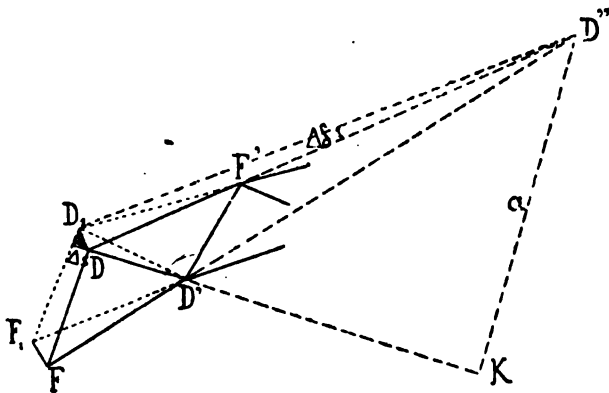


Fig. 189.

est semblable au grand triangle compris entre la ligne  $DD''$  et la perpendiculaire  $a$  menée du point  $D''$  sur la ligne  $DD'$ . La similitude des triangles donne la proportion suivante :

$$\frac{DD_1}{\Delta s} = \frac{DD''}{a}$$

En posant comme précédemment  $DD_1 = DD'' \cdot \Delta \delta$ , il vient :

$$\Delta \delta = \frac{\Delta s}{a}$$

L'expression (7) s'applique donc à toutes les à la condition, cela va sans dire, de donner à valeurs correspondant à la pièce considérée.

En comparant la formule (7) à celle que nous pour les poutres pleines, formule (1), on voit q analogies. La longueur  $\Delta s$  de l'élément est re longueur  $s$  de la pièce, et le moment d'inerti produit de la section de la pièce par le carré de s point de rotation. Quant aux autres termes, les sont identiques. Il en résulte que les théori avons trouvés pour un point invariablement li s'appliquent aussi aux arcs à treillis. En d'autre qu'une pièce se déforme, un point W (fig. 487), lié à la construction, décrit un arc de cercle W tre D correspond au centre de rotation de la pi rotation  $\Delta\delta$  se détermine par la formule (7). En  $x$  et  $y$  les ordonnées du point de rotation, le verticaux et horizontaux du point W s'expri pour les poutres pleines par :

$$\Delta v = x \cdot \Delta\delta = Q \cdot q \cdot x \cdot \frac{s}{E_{\omega} a^3}$$

$$\Delta h = -y \cdot \Delta\delta = -Q \cdot q \cdot y \cdot \frac{s}{E_{\omega} a^3}$$

Le théorème de la fin du § 4, page 236, est la condition d'y remplacer le centre de gravité par le *point de rotation de la pièce qui se substituer à l'expression des poids la nouvelle*

$$\frac{s}{E_{\omega} a^3}$$

## § 6

### ELLIPSE CENTRALE DE L'ARC ÉLA

Nous n'avons examiné jusqu'ici que la déf élément de la construction, mais il est facile d de la construction toute entière ; car si l'on a de

formation de tous les éléments de l'arc, il suffira pour obtenir la déformation totale d'additionner les déformations, parce qu'elles sont toujours très faibles relativement à la portée et à la flèche de l'arc.

Si l'on soumet tous les éléments de l'arc à une force extérieure  $Q$  et si l'on maintient l'extrémité de droite de l'arc, l'autre extrémité et tout point qui lui sera invariablement lié éprouvera une rotation  $\delta$ , un déplacement vertical  $v$  et un déplacement horizontal  $h$ . Ces déformations s'obtiendront simplement par sommation des expressions  $\Delta\delta$ ,  $\Delta v$ , et  $\Delta h$ , et l'on aura :

$$\delta = \Sigma \Delta\delta.$$

$$v = \Sigma \Delta v$$

$$h = \Sigma \Delta h$$

Dans le cas des arcs à paroi pleine, on introduira dans ces formules les expressions (1), (5) et (6). Dans le cas d'arcs à treillis on se servira des formules (7), (8) et (9). Comme nous l'avons vu, les expressions de  $\Delta\delta$  peuvent être considérées comme les moments statiques des éléments  $\frac{\Delta s}{EI}$  ou  $\frac{s}{E \cdot \omega \cdot a^2}$  appliqués aux centres de rotation, relativement à la direction de l'effort. Les  $\Delta v$  et les  $\Delta h$  sont les moments centrifuges des mêmes éléments relativement à l'axe vertical ou horizontal du point  $W$  et à la direction de l'effort.

On déduit de ces propriétés le théorème suivant :

*Si l'on suppose un arc à paroi pleine chargé en chacun de ses éléments d'un poids  $\frac{\Delta s}{EI}$ , ou un arc à treillis chargé en ses nœuds des poids  $\frac{s}{E \cdot \omega \cdot a^2}$ , la rotation d'un point  $W$  de l'arc sous l'influence d'une force extérieure  $Q$  aura pour expression le produit de cette force  $Q$  par le moment statique de l'arc ainsi chargé, relativement à cette force.*

*Le déplacement vertical de ce point  $W$  sera égal au produit de la force  $Q$  par le moment centrifuge de l'arc ainsi chargé, relativement à la direction de la force  $Q$  et à l'axe vertical des  $y$ .*

*Le déplacement horizontal du point W est dû à la force Q par le moment centrifuge de l'arc et des poids relativement à la direction Q et à des x.*

On construira pour l'ensemble de ces poids de la même manière que pour les surfaces de gravité et l'ellipse centrale, et cette ellipse permettra de calculer les moments pour des axes quelconques. Les moments de surface se trouvent tout simplement pour les poids.

Nous désignons l'ellipse ainsi construite par *Ellipse centrale de l'arc*.

Cette ellipse a été tracée dans la fig. 190 par son centre S qui est appelé *centre de gravité de l'arc*.

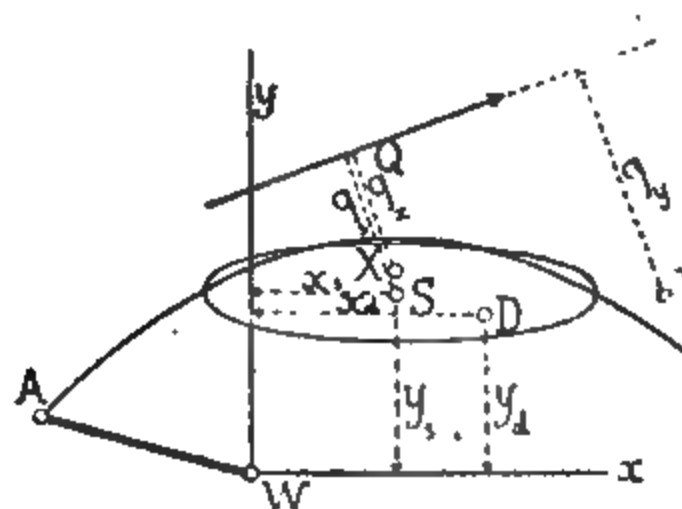


Fig. 190.

Le moment statique de l'arc chargé des poids est égal, comme on le sait, à la somme des moments des poids ou au produit du poids total par la distance du centre de gravité.

La rotation du point A et par suite aussi l'angle de l'arc est maintenu à son extrémité B, par un moment par

$$M = Q \cdot q \cdot \sum \frac{\Delta x}{EI} \quad (10)$$

$q_s$  étant la distance du point S à la force Q.

La théorie de l'ellipse centrale établit que le moment centrifuge rapporté à deux axes est égal au double produit de la somme des poids par la distance du centre de gravité à l'un des axes et par la distance de l'antipôle de cet axe au second axe.

Si l'on désigne par D l'antipôle de la ligne Q, on aura pour le déplacement vertical du point W

$$v = Q \cdot q_s \cdot x_d \cdot \Sigma \frac{\Delta s}{EI} \quad (11)$$

et pour le déplacement horizontal de ce point W

$$h = - Q \cdot q_s \cdot y_d \cdot \Sigma \frac{\Delta s}{EI} \quad (12)$$

Ces mêmes expressions sont applicables aux arcs à treillis en remplaçant  $\Sigma \frac{\Delta s}{EI}$  par  $\Sigma \frac{s}{E \cdot \omega \cdot a^3}$ .

On peut aussi, au lieu de considérer l'antipôle D de la ligne Q, considérer les points X et Y, antipôles de l'axe des  $x$  et de l'axe des  $y$ ; on arrive alors aux expressions

$$v = Q \cdot x_s \cdot q_y \Sigma \frac{\Delta s}{EI} \quad (13)$$

$$h = - Q \cdot y_s \cdot q_x \Sigma \frac{\Delta s}{EI} \quad (14)$$

Suivant le besoin, nous nous servirons de ces dernières formules ou des précédentes.

Nous avons jusqu'ici tracé les axes du point W verticalement et horizontalement, mais rien ne s'oppose à ce qu'on leur donne une direction quelconque. Faisons donc passer l'axe des  $x$  par le point D, en conservant l'axe des  $y$  perpendiculaire au premier;  $y_d$  et  $h$  deviennent nuls, ce qui signifie que le point W se meut dans la direction de l'axe des  $y$ , par conséquent perpendiculairement à WD: il en est de même de tout point W invariablement lié au point A. On peut donc énoncer le théorème suivant:

*Sous l'influence d'une force extérieure Q, le mouvement d'un*

*point invariablement lié à l'extrémité  $n$  que l'autre extrémité est supposée fixe, c. de l'antipôle de cette force.*

Nous avons supposé que la force  $Q$  en avons déduit les déformations, mais soudre le problème inverse, et déterminer la force  $Q$  qui produit une rotation donnée sur la ligne à laquelle correspond l'arc désigne par *antipolaire*. De plus, la rotation  $\delta$  se détermine par la formule (10) en fonction de la rotation  $\delta$ .

## § 7

### CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE CENTRALE D'UN ARC À PAROI PLEINE

La construction de l'ellipse centrale par la méthode que celle employée pour le calcul du moment de deux polygones funiculaires dans deux directions différentes, deux lignes de gravité et par suite le centre de gravité des segments coupés par les polygones funiculaires des centres de gravité, comme forces, et des polygones funiculaires, on détermine les moments centrifuges.

Il y a cependant quelques remarques particulières de l'arc à paroi pleine.

On détermine d'abord pour différents moments d'inertie, soit par le calcul et les formules simples, soit graphiquement quand les moments sont connus. Pour ce qui est du nombre des points de division cela dépendra de l'importance de la variation des moments, les variations seront grandes, plus on en prendra, et si la variation est faible, ce nombre sera réduit.

er que, dans la détermination des moments et toute entière est à considérer, sans déductions, et il est plus exact aussi de tenir compte des couvre-joints, en augmentant convenablement.

inertie étant calculés pour un certain nombre tracera la courbe représentative de leurs permettra de mesurer le moment d'inertie en  $10^6$ .

ment d'inertie est calculé par la méthode de  $I$  à un produit  $s'' \cdot n \cdot h' \cdot h''$ , dans lequel  $n, h', h''$  et ce sont les valeurs  $s''$  que l'on portera (Voir page 246).

rs de  $I$  et du rayon de giration  $r$ , nous aurons de la surface  $\omega$  de la section et de la distance extrême du noyau central au centre de gravité quantité  $k$  se détermine soit par le calcul, soit, en divisant  $r^2$  par la distance  $v$  de la fibre la plus éloignée au centre de gravité. Dans le cas où la section est dissymétrique, il y a deux valeurs de  $k$ , l'une pour le haut, l'autre pour le bas, et on les désigne par  $k_1$  et  $k_2$ .

$k_1$  et  $k_2$  calculées en certains points, serviront à représenter des sections représentatives qui permettront de les mesurer à quelconque.

On prendra un certain nombre d'éléments dans les sections représentatives (comme cela est indiqué

les sections sont le mieux placées sont les sections des charges, c'est-à-dire les points correspondants ou aux pièces de pont. Si l'on est obligé de faire une division à des éléments trop longs on peut l'éviter ; si, au contraire, le moment d'inertie d'un des éléments, ou pourra lui adjoindre

une longueur  $\Delta s$ , fig. 491, est trop grande pour être considérée comme une petite longueur, on peut la supposer divisée en petits éléments et déterminer l'ellipse représentative de ces petits éléments comme



## CHAPITRE VI — ARCS MÉ

pour les surfaces planes ;  
l'inertie de ces éléments de

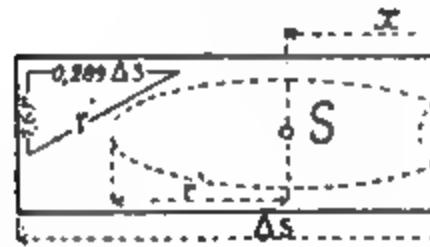


Fig. 491

noment d'inertie de l'éléme  
se d'un élément de longue  
 $r$ , a pour grand axe très ap  
a longueur  $\Delta s$  du grand élé  
eu, le petit axe de son ellip  
lésigne par  $x$  la distance d'u  
vertical du centre de gravi  
port à cet axe sera :

$$\frac{dx}{EI} \left\{ x^2 + (1,6r)^2 \right.$$

prise de  $-\frac{1}{2} \Delta s$  à  $+\frac{1}{2} \Delta s$

le carré du grand axe

$$r^2 = \frac{1}{12} \overline{\Delta s^2} +$$

isons, fig. 491, un triangle  
gle droit  $0,289 \Delta s$  et  $1,6r$ ,  
leur de  $r'$ .

stite construction secondair  
éments de grande longueur

l'élément, l'axe de l'arc .  
ue les valeurs de  $I$  et de  $r$  ne  
dire que pour  $I$  et  $r$ , on a  
yenne.

les valeurs  $\Delta s$  et  $I$ , sont d

nsi que les ellipses, on détermine les poids de ces on les porte verticalement à une échelle quelcon-  
polygone des forces. Le facteur E, qui est cons-  
ous les éléments, est laissé de côté, et l'on consi-  
ment les expressions  $\frac{\Delta s}{I}$  (ou  $\frac{\Delta s}{r^2}$  dans le cas de la  
on graphique des moments d'inertie). Nous dési-  
somme de tous ces poids par F et un élément de  
r  $\Delta F$ .

de polaire H du polygone des forces peut être quel-  
il y a cependant un avantage à la prendre égale

uit après cela cinq polygones funiculaires. Dans  
remier on applique les éléments  $\Delta F$  aux centres de  
éléments et on fait agir les poids verticalement.  
ond polygone funiculaire, on fait agir les forces  
points mais horizontalement, et on mène les côtés  
perpendiculairement aux rayons du polygone des  
eux premiers polygones déterminent le centre de  
l'arc. Les segments coupés par les rayons de ces  
nes funiculaires sur les axes du centre de gravité  
our considérés comme forces pour servir à tracer  
aux polygones funiculaires. Les distances polaires  
ervent à tracer ces derniers polygones sont tout à  
ques, mais au lieu d'appliquer les forces aux cen-  
ité des éléments, on les applique aux antipôles des  
assant par S. Dans le cas spécial où l'antipôle est  
ou tombe à l'infini, on décompose le poids  $\Delta F$  en  
1 applique chacune des moitiés à l'une des extré-  
mètre conjugué de la direction de l'axe S.

par  $t_1$  et  $t_2$  les segments interceptés entre les cô-  
de ces deux derniers polygones funiculaires sur  
aura alors pour le moment d'inertie de l'arc en-

$$I_1 = Hc_1 t_1 \text{ pour l'axe vertical}$$

et

$$I_2 = Hc_2 t_2 \text{ pour l'axe horizontal.}$$

# CHAPITRE VI — A

sant ces moments d  
extrayant la racine  
axes de l'ellipse centr

$$r_1 = \sqrt{\frac{t_1 \cdot H}{F}}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{t_2 \cdot H}{F}}$$

ensuite aux extrér  
trèmes du polygone  
une distance de  $t_1$  ég

$$r'_2 = \frac{t_2 \cdot H}{F} \text{ et l'on peu}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{t_1 \cdot H}{F}}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{t_2 \cdot H}{F}}$$

pressions peuvent se  
demi-cercles.

l'on a pris  $H$  égal à

reste à construire le  
t les segments coupe  
sur l'axe des  $x$  comm  
les de l'axe des  $x$ . Ce  
l'axe vertical un seg  
de l'arc. Il va sans c  
t est nul, mais cela  
sera utilisé dans la  
ciler l'ensemble de  
bleau qui suit, les e

qui servent à construire les cinq polygones fu-

FORCES	DIRECTION	POINTS D'APPLICATION
Poids $\Delta F$	verticalement	Centre de gravité
Poids $\Delta F$	horizontalement	— —
Centra sur l'axe des y	verticalement	Antipôle de l'axe des y
— — — $x$	horizontalement	— — — $x$
— — — $x$	verticalement	— — — $x$

# § 8

## CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE CENTRALE D'UN ARC A TREILLIS

Planche 13

qu'il y a entre les constructions qui précèdent et qu'il faut suivre nous permettra d'abréger. L'arc à treillis se construit de la même manière que l'arc à paroi pleine, comme nous l'avons déjà dit. Ici, au lieu d'être appliqués aux centres de gravité des éléments, les poids sont appliqués aux points de rotation.

On a donc l'expression  $\frac{s}{\omega a^2}$ , dans laquelle  $s$  est la longueur de l'élément,  $\omega$  la surface de section,  $a$  la distance des points de rotation.

On a donc en général à calculer pour chaque élément. à cet effet les pièces par ordre, et on constitue un tableau des valeurs de  $s$ , de  $\omega$ , de  $a$  et de l'expression  $\frac{s}{\omega a^2}$ . Le calcul de cette expression peut se faire à la règle à calcul. Les longueurs  $s$  et  $a$  se mesurent sur l'épure. On peut également

déterminer graphiquement ces expressions compliquées. On opère dans ce cas de la manière suivante.

On détermine, fig. 192, sur la ligne  $DD'$

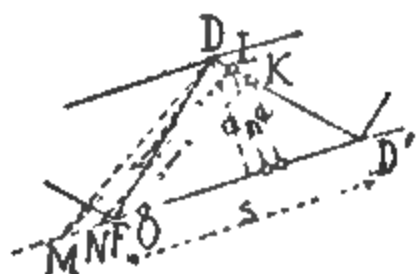


Fig. 192.

et  $L$ , le premier de ces points étant à une distance  $D'F$ , le second point  $L$  à une distance  $n$  de  $D'$ . L'échelle de  $\omega$  se choisit convenablement,  $n$  quelconque. On mène ensuite  $LM$  parallèle à  $DN$ , enfin  $LO$  parallèle à  $DM$ . La figure présente alors l'expression  $\frac{s}{\omega a^2}$  multipliée par  $\omega$  et  $a^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{D'M}{D'F} &= \frac{D'L}{D'K} = \frac{n}{\omega} \\ \frac{D'N}{D'M} &= \frac{D'L}{D'D} = \frac{n}{a} \\ \frac{D'O}{D'N} &= \frac{D'L}{D'D} = \frac{n}{a} \end{aligned}$$

où  $D'F$  est égal à  $s$ . La multiplication de ces trois expressions donne le résultat trouvé plus haut. Quoique cette méthode soit simple elle nécessite un grand nombre de constructions, et nous lui préférons la méthode analytique.

Comme précédemment, la section  $\omega$  représente la section complète de la pièce, sans déduction des trous. L'expression  $\frac{s}{\omega a^2}$  diminue avec le carré de la distance  $a$  de la pièce considérée à son point de rotation, et quand ce point est à l'infini. En général, pour les treillis des arcs, la distance  $a$  est grande et il est convenable de négliger les poids qui correspon-

tion des cinq polygones funiculaires se trouve beautifiée de ce fait, car on ne considère plus que les spondant aux membrures.

cas où le treillis est double, on procède comme pour les poutres à treillis double, en décomposant en deux systèmes superposés. On a par suite, pour un système de membrure, deux points de rotation, mais on considère la barre de l'un ou de l'autre système.

On applique les poids  $\frac{s}{\omega a^3}$ , pour chacun des deux points, en attribuant à chacun la moitié du poids trouvé. On peut aussi, dans un grand nombre de cas, sans erreur sensible, réunir les deux moitiés en considérant comme point de rotation un point au milieu de la ligne de jonction des deux systèmes. C'est pour ce point moyen qu'on détermine les poids, et on le lui applique tout entier. Dans le cas où il faudrait compte des barres de treillis, on procéderait de la même manière analogue.

Pour rendre plus claires les constructions dont nous venons de parler, nous renvoyons à la planche 43, qui contient l'épure de la construction de l'articulation.

La portée de l'épure est de  $\frac{1}{200}$ , l'ouverture de l'arc est de 7<sup>m</sup> 8, la largeur de la chaussée et du trottoir est de 4<sup>m</sup> pour chaque arc. Les 10 montants qui reportent la charge sur l'arc sont espacés de 4 mètres.

Les poids ont été calculés pour toutes les pièces et portés à l'échelle de 4<sup>m</sup> sur les autres, fig. 2, sur la verticale désignée par la *ligne verticale des poids*. Les sections ont été complétées en tenant compte des trous de rivets, en millimètres carrés; les longueurs  $s$  et  $a$  en mètres, et le résultat a été porté à l'échelle de 1<sup>m</sup> pour 0,0001. Pour la pièce 21 par exemple, de la section, d'une longueur  $s=1^m 9$ , située à une

distance d'un point de rotation  $a=0,66$ , on trouve  $\frac{s}{\omega a^3}=$

portés à l'échelle à 4<sup>m</sup> 6. L'arc est symétrique par rapport à son sommet, ce qui a permis de ne faire le calcul des

poids que pour la moitié de l'arc, et de donner aux pièces symétriques les mêmes numéros.

Les poids très petits correspondant aux  $\Delta F$  ont été négligés. La somme  $F$  des  $\Delta F$  est égale à la somme des poids, la distance du pôle  $O_1$  du premier polygone, fig. 2, au pôle  $O_2$  du second polygone est égale à la somme des distances des pôles  $O_1$  et  $O_2$  à la ligne horizontale du centre  $S$  qui est la somme des hauteurs des pôles  $O_1$  et  $O_2$  au-dessus de la ligne horizontale du centre  $S$ .

Nous n'avons pas d'autre observation à faire sur la construction du premier polygone, fig. 3. Pour les hauteurs verticales ont été portées en triple grandeur sur la ligne horizontale du centre  $S$  qui est la ligne des intersections bien déterminées. Les efforts horizontaux sont numérotés. Les côtés du deuxième polygone funiculaire, fig. 4, sont perpendiculaires aux rayons du pôle  $O_2$ , fig. 2, et ce polygone est une ligne difficile à cause de la petite échelle de la construction. On a complètement ce polygone sans embrouiller les côtés. Le côté n'a été représenté que par un petit trait de section avec la force. Les côtés extrêmes se coupent en  $S'$  qui détermine la hauteur du point  $S$ . Il est facile de voir dans la fig. 4. Les constructions et les calculs qui exigent le plus de soin sont celles des segments du premier polygone funiculaire sur la verticale de gravité  $S$ , et celles des segments interceptés par  $S'$  par le second polygone funiculaire. Ces segments sont très petits, servent comme forces à la construction du troisième et du quatrième polygone funiculaire. Le troisième polygone funiculaire est tracé à une distance polaire  $c_1 = 30^{\text{mm}}$ , le quatrième à une distance polaire  $c_2 = 15^{\text{mm}}$ . La forme du polygone est celle d'un  $S$ , et la distance verticale des extrêmes représente  $t_1$ .

Le quatrième polygone se compose de deux parties, une courbure, et la distance horizontale entre les extrêmes représente  $t_2$ .

Les longueurs  $t_1$  et  $t_2$  servent à la détermination de l'ellipse centrale, le demi-axe horizontal

$$r_1 = \sqrt{c_1 t_1}$$

vertical est égal à

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{18} c_2 t_2}$$

et  $\frac{1}{18}$  vient de ce que la distance polaire du pôle est égale à  $\frac{1}{2} F$ , et non égale à  $F$ , et de ce que le dessin est à une triple grandeur.

La solution de ces deux expressions est connue, elle est tracée de demi-cercles qui n'ont pas été conservés. Le tracé de l'ellipse au moyen de ses deux axes est une difficulté.

Pour la symétrie des charges, nous avons tracé, en vue de l'avenir, le cinquième polygone funiculaire et centrifuges, fig. 6. Les forces qui ont servi à ce tracé sont les mêmes que celles du deuxième polygone, fig. 4. On s'est servi de la même force  $P$ , et on a fait agir les forces verticalement.

## § 9

### INTERSECTION DES RÉACTIONS ET LIGNE ENVELOPPE DES RÉACTIONS

Pour déterminer les charges défavorables de l'une des pièces d'une machine, il est nécessaire de pouvoir construire les réactions des appuis qui correspondent à une charge donnée. On construit à cet effet, avant de calculer les réactions, la courbe sur laquelle les réactions correspondantes se coupent ; de plus, dans le cas de déformation, on construit également la courbe enveloppe des réactions.

On abrégera, pour abréger, ces deux courbes par les expressions *ligne ou courbe d'intersection* et *ligne ou courbe*

La force  $P$  se décompose en deux réactions obliques qui se coupent sur la force  $P$  ; leur grandeur se dé-



termine par simple décomposition de  $P$ , dès leur direction. Les deux réactions constituent une ligne de pression correspondant à la charge. Cette pression dépend uniquement de la position de la charge et est indépendante de sa grandeur. Les réactions sont donc fonctionnelles à la charge.

Lorsqu'on déplace la charge, de gauche à droite, les réactions se déplacent avec elle; la réaction de gauche s'incline davantage, celle de droite se rapproche du point d'appui. Ce déplacement, qui se fait d'une manière continue, engendrent la *courbe enveloppe* dont elles sont les tangentes et en même temps elles engendrent par leur position sur la charge la *courbe des intersections*.

La construction de ces deux courbes fait l'objet des paragraphes suivants. Lorsqu'elles sont tracées pour une charge correspondant à une charge s'obtiennent les réactions en menant par le point d'intersection de la courbe des intersections, deux tangentes à l'enveloppe, et en décomposant la charge suivant ces deux tangentes.

Ce qui précède s'applique aux arcs sans articulations. Si l'arc a deux articulations aux appuis, les réactions sont déterminées par ces articulations. Dans ce dernier cas, les réactions constituent, avec les appuis comme sommets, un système de trois forces. La courbe enveloppe disparaît, mais la courbe des intersections subsiste. Les réactions correspondant à une charge s'obtiennent en joignant le point d'intersection de la charge et de la courbe des intersections aux appuis, et en décomposant la charge suivant ces deux directions ainsi obtenues.

#### § 10

### CONSTRUCTION DE LA COURBE D'INTERSECTIONS ET DE LA COURBE ENVELOPPE D'UN ARC SANS ARTICULATIONS

Nous passons à la construction des deux courbes pour le cas de l'arc sans articulations.



Le déplacement vertical  $v$  du point S est le moyen du moment centrifuge rapporté à l'axe horizontal du point S et à la force. Ce moment centrifuge est le moment du segment  $u_1$  intercepté, fig. 5, sur la force cinquième polygone funiculaire et son dernier côté

$$v = P.H.c_1.u_1$$

Enfin le déplacement horizontal du point S est le moyen du moment centrifuge de la partie CB de l'arc, rapporté à l'axe horizontal du point S et à la force, fig. 193. Le moment centrifuge donne le moment statique des points de l'arc par rapport à l'axe horizontal S, les segments qui servent à tracer le cinquième polygone funiculaire. Les segments interceptés entre le cinquième polygone funiculaire et son dernier côté sont désignés par  $u_2$  et le déplacement horizontal sera

$$h = P.H.c_2.u_2$$

$u_1$  et  $u_2$  sont indiqués, pl. 13, pour la cinquième force.

Les déplacements du point S peuvent être trouvés comme nous l'avons fait plus haut, comme une détermination d'un point D, fig. 193. Soient  $x_d$  et  $y_d$  les coordonnées du point D, on aura

$$v = x_d \delta \quad h = y_d \delta$$

et en introduisant la valeur trouvée pour  $\delta$

$$x_d = \frac{c_1 u_1}{u_1} \quad , \quad y_d = \frac{c_2 u_2}{u_1}$$

Ces deux expressions déterminent le point D.

La réaction Q des appuis doit avoir pour effet de maintenir le point S en place ; elle agit sur l'arc entier, d'où le théorème du § 6 qu'elle doit être l'antipolaire du point S.

Si l'on désigne par K et L les points d'intersection de la réaction avec l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$ , on aura

$$KS.x_d = -r_1^2$$

$$LS.y_d = -r_2^2$$

et en introduisant les valeurs trouvées pour  $x_d$  et  $y_d$

$$\begin{aligned} KS &= - \frac{r_1^2 \cdot u_1}{c_1 \cdot u_2} \\ LS &= - \frac{r_2^2 \cdot u_1}{c_2 \cdot u_3} \end{aligned} \quad (16)$$

enfin en utilisant les formules (15), page 248

$$\begin{aligned} KS &= - \frac{t_1' \cdot u_1}{u_2} \\ LS &= - \frac{t_2' \cdot u_1}{u_3} \end{aligned}$$

Ces formules permettent de déterminer très facilement les réactions de gauche, pour des charges isolées. C'est ce qui a été fait dans la pl. 13 pour les 10 efforts agissant aux montants. La distance polaire du point O, étant égale à F, nous aurons  $t_1' = t_1$ . Les  $u_3$  sont six fois trop grands ; les  $t_2$ , 18 fois.

Il en résulte que pour obtenir LS en grandeur réelle, nous remplacerons  $t_2'$  par  $\frac{1}{3} t_2$ . Il n'y a pas à tenir compte des signes, car les points K se trouvent toujours à gauche et les points L toujours au-dessus du point S. (Dans nos formules, toutes les valeurs sont positives à l'exception de  $u_3$  ; il en résulte que KS est toujours négatif, tandis que LS est positif.)

Les points K et L s'obtiennent en portant successivement, à partir du point S, la longueur  $u_1$  mesurée sous l'effort, horizontalement à gauche, la longueur  $u_2$  verticalement par le bas, puis  $u_3$  horizontalement vers la droite et enfin les constantes  $t_1$  et  $\frac{1}{3} t_2$  verticalement par en bas. On réunit ensuite, par une droite, les extrémités de  $u_1$  et de  $u_2$ , on mène par l'extrémité de  $t_1$  une parallèle à cette droite, qui détermine le point K. En réunissant par une droite les extrémités de  $u_3$  et de  $\frac{1}{3} t_2$ , et en menant par l'extrémité de  $u_1$  une parallèle à cette droite, on obtient le point L. Ces constructions sont indiquées en partie dans la planche 13 pour la cinquième charge.

En réunissant les points K et L, correspondant aux 5 points d'application des charges, on obtient 5 tangentes à la courbe

enveloppe et en même temps 5 points de la courbe des intersections.

En reportant les points K à droite symétriquement, on obtient les tangentes de la courbe enveloppe de droite et en même temps une vérification des points de la ligne des intersections. Les points de la courbe des intersections permettent de tracer cette courbe. On pourrait aussi, au moyen des tangentes, tracer la courbe enveloppe, mais cela n'a aucune utilité pour la suite et l'on s'est dispensé de le faire sur la planche.

La construction des réactions correspondant à des charges isolées, montre que le calcul graphique de l'arc sans articulation présente un inconvénient. Les constructions des réactions sont satisfaisantes pour le milieu de l'arc, mais leur exactitude est bien moins grande dans les environs des appuis. Pour la dernière charge les valeurs des  $u$  sont presque nulles et la détermination des réactions est pour ainsi dire impossible.

Nous remarquerons toutefois que cet inconvénient ne tient nullement à la méthode; s'il ne frappe pas autant dans la méthode analytique, c'est parce qu'on peut introduire dans les calculs un nombre illimité de décimales. En réalité, cette inexactitude dans les constructions graphiques est plutôt apparente que réelle; les forces intérieures, déterminées au moyen de la ligne des intersections et de la courbe enveloppe, dépendent très peu des charges voisines des appuis, et les résultats sont peu altérés par l'inexactitude dans la détermination des courbes dans le voisinage des appuis.

On peut du reste remédier en grande partie à ce manque d'exactitude par les considérations suivantes :

Supposons de nouveau l'arc maintenu à son extrémité de droite, tandis que l'autre extrémité est libre de se mouvoir et faisons agir la dernière charge, n° 10.

En négligeant la dernière barre de treillis, les deux membrures 1 et 2 sont les seules pièces qui se déforment.

Le point de rotation correspondant à la membrure 2 est situé (sans erreur sensible) dans la direction de l'effort 10, il en résulte que  $\delta$ ,  $v$ ,  $h$  sont nuls pour cette pièce; la partie de la

construction située à gauche de la charge tourne autour du nœud opposé à la membrure 1, qui n'est autre chose que le point d'appui de la membrure supérieure. Comme la réaction correspondant à la charge doit annuler cette rotation, et comme toute force fait tourner l'appui de gauche autour de l'antipôle de cette force rapporté à l'ellipse centrale, la réaction cherchée tombe sur l'antipolaire du point d'appui de la membrure supérieure.

Cette réaction peut donc se construire au moyen de l'ellipse centrale de l'arc.

Les mêmes considérations nous conduisent à une construction des réactions correspondant à la charge 9. La construction, bien que n'étant pas aussi simple que la précédente, est pratique dans un grand nombre de cas.

Cette charge 9 influe sur les 6 dernières membrures de l'arc, 6 à 1 ; les points de rotation de ces membrures sont très rapprochés. Les charges, qui sont à appliquer à ces points de rotation, sont données dans le polygone des forces, et l'on pourra tracer rapidement, sans qu'il soit nécessaire d'y apporter beaucoup de soin, la petite ellipse centrale pour les 6 points de rotation et l'antipôle  $D_9$  de la charge 9 rapporté à cette petite ellipse.

La réaction de la charge 9 est l'antipolaire du point  $D_9$  rapporté à l'ellipse centrale de l'ensemble de l'arc.

Ces dernières constructions permettent de corriger, avec une exactitude suffisante, les réactions correspondant aux deux dernières charges. Pour les autres charges l'incertitude disparaît, et la méthode générale donne des résultats satisfaisants.

En terminant ce paragraphe, nous remarquerons que dans les arcs symétriques on peut se contenter de construire la moitié des polygones et de l'arc lui-même ; le travail se trouve beaucoup simplifié, et cela permet de faire l'épure à une échelle double.

La construction subira quelques légers changements dans la manière de mesurer et de reporter les  $u$ , mais chacun sera à même de les imaginer.

Dans la pl. 13, les constructions ont été faites sur l'arc en-

tier, pour deux motifs : En premier lieu, les constructions sont plus claires, et en second lieu, nous aurons besoin de l'arc entier et des courbes complètes pour la détermination des forces intérieures.

En pratique il sera souvent avantageux de faire l'épure sur deux feuilles. La première servira à la détermination de la courbe enveloppe et de la courbe des intersections, en se servant de la moitié de l'arc seulement ; la seconde feuille, sur laquelle l'arc entier sera tracé, servira à la détermination des forces intérieures.

### § 11

#### CONSTRUCTION DE LA LIGNE DES INTERSECTIONS D'UN ARC A DEUX ARTICULATIONS

Lorsque l'arc repose sur les appuis au moyen de deux articulations, les constructions diffèrent en plusieurs points de celles du paragraphe précédent. On peut se dispenser de déterminer les rayons de giration  $r_1$  et  $r_2$ , et le nombre des polygones funiculaires se réduit à trois.

Comme nous l'avons déjà dit, l'arc à deux articulations doit satisfaire aux lois de l'équilibre, et de plus l'écartement de ses appuis est invariable. Seul le déplacement  $h$ , fig. 190, du point W invariablement lié au point A, nous intéresse ; les déplacements  $\delta$  et  $v$  sont laissés de côté. Nous aurons alors la seule condition :

$$h = \Sigma \Delta h = 0$$

et, comme cela a été dit, les réactions passent par les articulations des appuis ; c'est pour cela que la condition précédente suffit à déterminer ces réactions.

Pour résoudre le problème simplement, on fait tomber le point W sur l'appui A ; et nous avons vu au § 6 que pour ce point le déplacement horizontal est proportionnel au moment centrifuge des éléments d'arc, relativement à la direction de la force et à la ligne horizontale menée par le point A.

ous cette dernière horizontale comme axe des  $x$  uirons les moments statiques rapportés à cette us appliquerons ces moments aux éléments verticales pour construire le moment centri- on le verra dans la suite, nous aurons besoin le l'axe AB par rapport à l'ellipse centrale de istruirons donc encore un troisième polygone moments statiques considérés comme forces

omme nous l'avons fait au § 7, les construc- gones d'un arc à paroi pleine, en remarquant à treillis les centres de gravité et les antipôles par les nœuds.

POIDS	DIRECTION DES POIDS	POINTS D'APPLICATION DES POIDS
Poids $\Delta F$	horizontalement	Centre de gravité
. coup. s. l'axe AB	verticalement	Antipôle de l'axe AB
. coup. s. l'axe AB	horizontalement	Antipôle de l'axe AB

ter ce qui précède, nous renvoyons à la pl. 14, l'épure d'un pont de Francfort-sur-le-Mein (1). e inférieure de cet arc est circulaire et repose ar des surfaces et non des articulations, mais appui sont si petites dans ce système de cons- peut les considérer comme des points. C'est othèse que l'auteur de ce projet a fait le calcul

le l'arc est de 36<sup>m</sup> 75, sa flèche de 3<sup>m</sup> 661.

orte une largeur de chaussée de 1<sup>m</sup> 45.

l des pièces de pont est de 1<sup>m</sup> 75.

artie à treillis et en partie à paroi pleine; les

par conséquent en partie égaux à  $\frac{s}{\omega n^2}$  et en

rist für Baukunde », 1879, et « Heinzerling Brücken der



partie à  $\frac{\Delta s}{I}$ . Nous avons essayé de tenir compte des treillis et des montants, mais nous avons dû y renoncer, les éléments  $\Delta F$  étant trop petits. Seuls les montants extrêmes ont été considérés; pour ces derniers le point de rotation se trouve à l'intersection des pièces de 2 et 4, et la distance  $\alpha$  est relativement faible.

Il est à remarquer qu'en réalité ces deux montants extrêmes sont plutôt des membrures que des treillis.

Le nombre des pièces considérées pour chaque moitié d'arc, est de 15. La partie pleine de l'arc a été divisée en 7 éléments. La détermination graphique des moments d'inertie n'est pas donnée dans la planche; elle ne présente aucune difficulté.

Tous les poids  $\Delta F$ , cela va sans dire, sont à porter à la même échelle. Si l'on détermine par la formule  $\frac{s}{\omega a^2}$  les poids correspondant à la partie en treillis, on remplace dans le calcul des poids de la partie pleine le moment d'inertie  $I$  par  $\omega r^2$ , et il ne reste plus alors qu'à prendre pour les  $\omega$  la même échelle et pour  $s$ ,  $a$ ,  $\Delta s$  et  $r$  aussi la même échelle. Dans la pl. 14, on a pris comme unité des surfaces le millimètre carré et comme unité de longueur le mètre. Si l'on détermine les poids graphiquement, suivant la méthode de la fig. 192, on construit les poids  $\frac{\Delta s}{\omega r^2}$  de la même manière, ou bien on calcule une constante  $n' = \frac{n^3}{n_1 h' h''}$ , dans laquelle  $n$  est la constante de la fig. 192 et  $n_1, h', h''$  sont les constantes du moment d'inertie  $n_1 h' h'' s'''$  déterminé par la méthode de Culmann; on construit alors  $\frac{n' \Delta s}{s'''}$  graphiquement.

Si l'arc est tout entier à paroi pleine, ces précautions deviennent inutiles; les constantes  $n_1, h', h''$  sont négligées, et les poids dont on se sert se réduisent à  $\frac{\Delta s}{s'''}$ .

Dans la planche 14 les poids ont été calculés. Pour la pièce 1, par exemple, on a :  $\omega = 5200^{\text{mm}^2}$ ,  $s = 3^{\text{m}}89$ ,  $a = 1^{\text{m}}75$ ,  $\Delta F = 0,00024$ . Pour le premier élément à paroi pleine 16, on a :  $\omega = 34700^{\text{mm}^2}$ ,  $\Delta s = 1,75$ ,  $r = 0,29$ . On en déduit  $\Delta F = 0,00060$ .

ont été portés sur une horizontale pour plus de ; chaque millimètre représente 0,005 unités. La aire du point  $O_1$  est égale à la somme de tous les i donne 0,00918.

7 éléments pleins, nous avons tracé les ellipses, trèmes du noyau central et les antipôles de l'axe AB. s servent dans la construction du deuxième et du olygone funiculaire ; mais ces points se rappro- nent des centres de gravité, à l'échelle de la 'on ne les distingue plus.

ne peu de chose à dire sur la construction des trois funiculaires. Dans le premier et le troisième les sent horizontalement et, pour arriver à une plus titude, les distances verticales ont été portées à une druple, comme cela avait été fait aussi dans la

Les lignes horizontales suivant lesquelles les for- portent leurs numéros ; de 1 à 15 elles passent ds des treillis et de 16 à 19 par les centres de gra- ntipôles des éléments. Dans le troisième polygone, orizontales des forces 16 à 19 sont situées un peu ue dans le premier. Les côtés du premier poly- arallèles aux rayons qui partent du point  $O_1$ , et oints d'application des forces se trouvent alterna- r la membrure supérieure et sur la membrure in- polygone est en zigzag. Le premier et le dernier polygone déterminent par leur intersection  $S'$  la centre de gravité de l'arc. Les segments inter- e même polygone sur l'axe  $A'B'$  servent de forces le second et le troisième polygone funiculaire. cet effet comme pôle le point d'intersection  $S'$ , e la distance polaire est égale à  $y_1$ , ordonnée du avité (comparer avec figure 194, page 264).

du deuxième polygone funiculaire sont perpendi- rayons qui partent du pôle  $S'$  et ceux du troisième rallèles. Les segments coupés par le dernier po- 'axe  $A''B''$  sont proportionnels aux moments d'iner- ls  $\Delta F$ . En multipliant leur somme par les deux laires, on obtient le moment d'inertie pour l'arc

entier ; il est égal à  $H \cdot y_s \cdot A''B''$  ; d'autre part il est égal aussi à  $F \cdot y_s \cdot y_x$ ,  $y_x$  étant l'ordonnée de l'antipôle X de l'axe AB. Il en résulte que  $H = F$  et  $y_x = A''B''$ . Or comme les côtés extrêmes du troisième polygone funiculaire sont parallèles aux rayons extrêmes du point  $O_1$ , le triangle  $A''B''X$  a sa base égale à sa hauteur ; cela signifie que le point d'intersection  $X''$  donne (en tenant compte de l'échelle des longueurs) la position en hauteur du point X.

Ce point X permet de tracer l'axe vertical de l'ellipse centrale ; le demi-axe est égal à  $r_s = \sqrt{y_s(y_x - y_s)}$ .

N'ayant pas besoin dans la suite de cette quantité, sa détermination n'a pas été faite ; on n'a pas déterminé non plus l'axe horizontal qui nécessiterait le tracé d'un quatrième polygone.

Supposons maintenant l'arc chargé au 9° montant d'un poids isolé P ; en prolongeant la force P, le segment  $u$ , intercepté par le deuxième polygone funiculaire sur cette force, représente le déplacement horizontal de l'appui A sous l'influence de cette charge.

Le double produit de ce segment par la distance polaire H et par  $y_s$  représente le moment centrifuge des poids situés à droite de la force, relativement à la ligne P et à la ligne AB. Le déplacement horizontal du point A aura donc pour expression (voir page 244) :

$$h = P \cdot H \cdot y_s \cdot u$$

La réaction Q agissant sur l'appui A doit ramener le point A en place. Cette réaction agit comme force extérieure sur

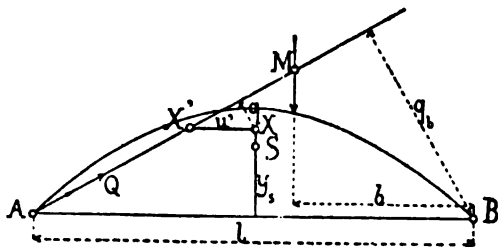


Fig. 194

l'arc entier ; il y aura donc à considérer le moment centrifuge

de l'arc complet rapporté à l'axe AB et à la ligne Q ; ce moment est égal à  $F.y.q$ , fig. 194. Le déplacement horizontal dû à la réaction Q aura pour expression :

$$h = Q.F.y.q$$

Égalant les deux valeurs trouvées pour  $h$ , il vient, en tenant compte de ce que  $H = F$  :

$$P.u = Q.q$$

Pour construire facilement la réaction Q, il est nécessaire de transformer cette expression. A cet effet, menons une horizontale par le point X, fig. 194, jusqu'à la réaction et désignons la distance XX' par  $u'$  ; puis menons du point B une perpendiculaire sur Q, perpendiculaire que nous désignerons par  $q_b$  ; nous pourrions écrire :

$$\frac{u'}{q} = \frac{l}{q_b}$$

et

$$u' = \frac{q.l}{q_b} = \frac{P.u.l}{Q.q_b}$$

et puisque la résultante des forces Q et P passe par l'appui B, nous aurons, en désignant par  $b$  la distance de la charge P au point B :

$$Q.q_b = P.b$$

et

$$u' = \frac{u.l}{b}$$

En projetant, Pl. 14, dans le 2<sup>e</sup> polygone funiculaire le segment  $u$  du point B, sur la verticale de l'appui de gauche, on obtient sur cette verticale le segment  $u'$ . En portant ce segment sur l'horizontale X, on obtient X' et par suite la direction de la réaction Q.

Cette construction a été faite dans la Pl. 14 pour 20 charges isolées, correspondant aux pièces de pont. Les points d'intersection des réactions et des charges ont permis de tracer la courbe des intersections. Cette courbe doit être, cela va sans dire, symétrique relativement à l'axe du pont.

Lorsqu'on déplace la charge  $P$  vers la droite,  $u$  et  $u'$  diminuent et deviennent presque nuls au droit du dernier montant ; il en résulte que, pour cette position de  $P$ , la réaction  $Q$  passe par le point  $X$ , ou du moins s'en écarte peu.

Les points extrêmes de la courbe d'intersection peuvent par suite se déterminer très exactement, et servir à rectifier au besoin les points voisins.

Toute la construction qui précède peut se faire sans difficulté pour une moitié de l'arc seulement, à une plus grande échelle ; mais nous avons préféré donner l'épure de l'arc complet, pour faciliter les explications.

De plus, nous aurons besoin dans la suite, de l'arc complet ; mais, comme nous l'avons déjà dit pour l'arc sans articulation, il est très avantageux de diviser l'épure en deux, en construisant sur une première planche la courbe des intersections pour la moitié de l'arc dessiné à plus grande échelle.

## § 12.

### CHARGES DÉFAVORABLES DES ARCS A PAROI PLEINE

Lorsque la courbe des intersections des réactions et la courbe enveloppe ont été construites, il est facile de déterminer les charges défavorables, c'est-à-dire les parties de l'arc dont le chargement produit l'effort maximum dans la section ou la pièce considérée. Mais il est nécessaire de distinguer comme précédemment les arcs à paroi pleine des arcs à treillis.

On sait que lorsqu'une section de poutre est soumise à l'action d'une force extérieure, la fibre neutre est l'antipolaire du point d'application de la force, par rapport à l'ellipse centrale. Dans le cas où la force agit au centre de gravité, l'axe neutre est à l'infini et l'effort se répartit également sur toute la section. Dans le cas contraire où l'effort est situé à l'infini, c'est-à-dire lorsque la poutre est soumise à un moment fléchissant, c'est l'axe neutre qui passe par le centre de gravité. Si l'on fait parcourir au point d'application de la force le con-

on, l'antipolaire se déplacera en enveloppant le

térieure est un effort de compression et si son ion se trouve à l'intérieur du noyau central, sera soumise à la compression.

C Dans la fig. 195, l'ellipse centrale et le noyau central ont été dessinés pour une section en double T.

.. Nous désignerons à l'avenir les points K et K' par l'expression *extrémités du noyau central*. La construction de ces points est indiquée dans la figure. On construit le triangle rectangle de la figure avec une hauteur égale au demi-diamètre de l'ellipse d'inertie ; l'un des segments coupés par la perpendiculaire  $r$  sur le triangle est la distance  $v$  de la fibre extrême de gravité, l'autre est  $k$  la distance cherchée au même point.

ie la force extérieure exerce une compression point d'application de la force extérieure sur bas ; la fibre neutre se déplacera aussi vers le point d'application de la force se trouve au centre neutre coupe la section et la fibre extrême tendue. Au moment où le point d'application de la force neutre se confond avec la fibre extrême n'y a plus dans cette fibre ni tension ni compression lorsque le point d'application de la force descend du point K, toute la section est comprimée. La force extérieure située au-dessus du point K a une tension dans la fibre extrême inférieure, et la force au-dessous du point K donne de la compression à cette fibre.

favorable pour cette fibre extrême inférieure. En résumé, la charge qui donne les efforts de compression, s'obtiendra en faisant agir toutes les forces que la force extérieure passe en dessous

lu point K. La charge complémentaire sera celle qui donne l'effort maximum de tension.

On obtient de la même manière la charge défavorable de la fibre extrême supérieure en considérant le point K'.

Lorsqu'il s'agit de déterminer les charges défavorables d'une section d'arc à paroi pleine, on mène par les points K et K' des tangentes aux courbes enveloppes des réactions et l'on prolonge ces tangentes jusqu'à la courbe des intersections. Dans la fig. 196, par exemple, le point K est le point extrême supérieur du noyau central de la section CC'; les tangentes menées par ce point aux courbes des intersections coupent la ligne d'intersection en E et F. Toutes les charges qui se trouvent à gauche de E et à droite de F donnent de la compression dans la fibre extrême inférieure, tandis que toutes les charges qui sont situées entre E et F produisent de la tension dans cette fibre. En effet, la ligne de pression d'une charge située en dehors de EF passe au-dessous du point K, tandis que la ligne de pression d'une charge située entre E et F passe au-dessus du point K.

Pour produire dans la fibre extrême inférieure l'effort de

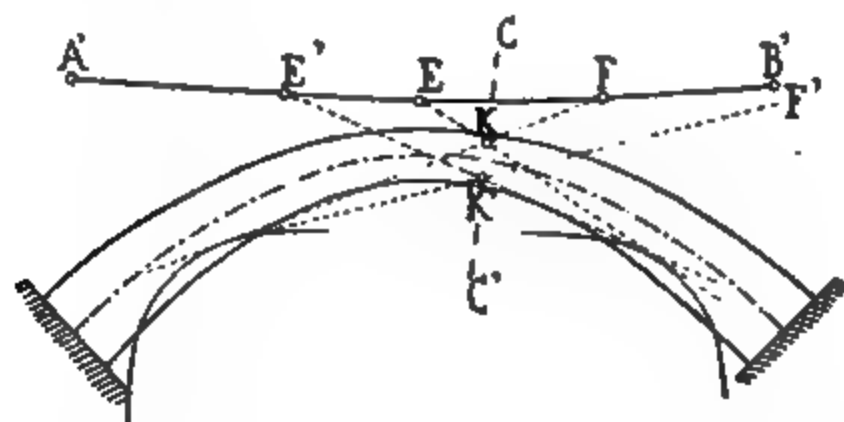


Fig. 196

compression maximum, il faudra donc charger l'arc de A' en E et de F en B'; tandis que l'effort de tension maximum s'obtiendra en chargeant de E en F. En menant les tangentes par le point K' à la courbe enveloppe, on trouve d'une manière analogue les charges défavorables pour la fibre extrême supérieure de la section CC'. Mais, dans la figure, l'un des points d'intersection F' tombe en dehors de la portée de l'arc, et il n'est par suite pas à considérer. En chargeant de A' en E', on

fort de tension maximum, et en chargeant de E' en le compression maximum.

Remarque que pour les sections voisines des appuis trois fois mener par les points K, à la courbe enveloppe, tangentes qui coupent toutes les deux la courbe des intensités entre les points A' et B'.

Il arrivera aussi qu'il n'y ait pas de tangentes réelles au point K tombe à l'intérieur de la courbe ; dans ce cas, c'est la charge totale qui est la charge défavorable.

Dans le cas des arcs à articulations sur les appuis, les courbes disparaissent et sont remplacées par les points d'appui ; tandis que les tangentes deviennent des lignes qui passent par les points K et par les appuis ; pour tout le reste, rien de différent.

Pour l'étendue de la charge défavorable a été déterminée par la méthode précédente pour une série de sections, on conserve la même méthode que nous développerons dans la suite.

On trouve les forces extérieures correspondant à ces charges défavorables. Le coefficient de travail R de la fibre extrême, correspondant à la charge défavorable, s'obtient le plus simplement par la méthode suivante :

Si l'on désigne par Q la force extérieure correspondant à la charge défavorable de la fibre extrême inférieure de la section CC', fig. 197, le coefficient de travail sera donné par la formule connue

$$R = \frac{N}{\omega} + \frac{N.n.v}{I}$$

où N est la composante normale de la force extérieure, n la distance de la fibre extrême au point S, v la distance de la fibre extrême au point S,  $\omega$  la surface de section, I le moment d'inertie de la section. On a  $I = \omega r^2$  et (fig. 197)  $r^2 = v.k$ . On peut par

$$R = \frac{N}{\omega} + \frac{N.n.v}{\omega.v.k} = \frac{N(k+n)}{\omega.k}$$



## CHAPITRE VI — ARCS METALLIQUES

ominateur représente le moment de résistance  $\frac{I}{v}$  et  
 ateur le moment de la force  $N$  par rapport au  
 Et puisque l'effort tranchant  $T$  passe par le point  $K$ ,

$$N(k+n) = Q \cdot q$$

te que

$$R = \frac{Qq}{\omega \cdot k} = \frac{M_k}{\frac{I}{v}} \quad (17)$$

très facilement construire par cette formule le pro-  
 mais cette construction est peu exacte, parce que  $k$   
 tit, et il sera préférable en général de calculer la va-

### § 13

#### ES DÉFAVORABLES DES ARCS A TREILLIS

rmination des charges défavorables des arcs à treil-  
 d'une manière analogue à celle des arcs à paroi  
 ais les points extrêmes du noyau central sont à  
 par les nœuds.

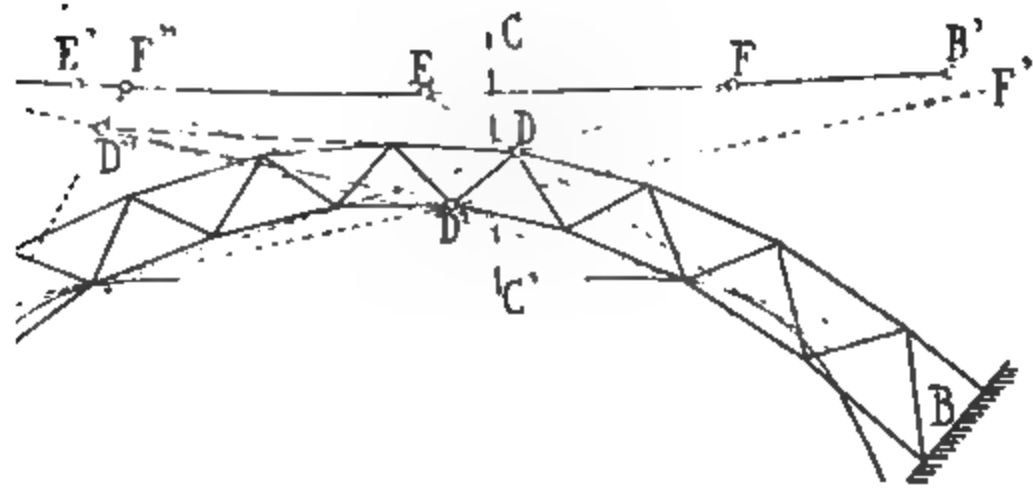


Fig. 198.

fig. 198, nous avons représenté un arc sans arti-  
 avec la courbe enveloppe et la courbe des intersec-  
 considérons une section  $CC'$  qui coupe trois pièces,

s et une barre de treillis. Désignons par U, O, S agissant dans ces trois pièces, et par D, D', D'' agissant sur ces pièces. Menons par le point D deux tangentes à la courbe enveloppe. Ces tangentes coupent la section A'B' en E et F et ces derniers points sont les points de charges défavorables.

La pièce placée à gauche du point E a une ligne de charge se en dessous de D. À gauche de la section, la charge est la résultante de la charge et de la réaction de gauche. Cette charge n'est autre chose que la réaction de droite de la section contraire. Cette force, dirigée de gauche à droite, agit relativement au point D un moment négatif; sa résultante suivant les trois pièces U, O, S, (comparativement des forces O et S sont nuls.

La force U par rapport au point D sera positive et la force O agira comme effort de compression. La charge située entre les points E et F a une ligne de charge passant au-dessus du point D et donne de la charge à la pièce U. Enfin une charge agissant à droite de la pièce U des efforts de même sens qu'une charge à gauche de E.

La compression, dans la membrure inférieure, est la plus grande que les charges s'étendront de A' en E et de F en B' et la tension maxima s'obtiendra en chargeant

la membrure supérieure de la section. On considère le nœud D'. En menant par ce nœud des tangentes à la courbe enveloppe, on intercepte sur les intersections les points E' et F'; mais les points E' et F' ne sont pas à considérer, car il tombe en dehors de la section A'B' de l'arc. On trouve, comme précédemment, en chargeant la partie A'E' de l'arc, on développe la charge maximum dans la membrure considérée. La charge E'B' produit l'effort de compression maxi-

mum dans les barres de treillis se détermine de la même manière. En menant par le point D'' des tangentes à la courbe enveloppe, on intercepte sur la courbe des

intersections les points  $E''$  et  $F''$ , mais il est à remarquer que le dernier de ces points ne limite pas la charge défavorable, c'est la section  $CC'$  qui la limite. Pour toutes les charges situées à gauche de la section, les forces extérieures sont égales aux réactions de droite prises en signe contraire, tandis que pour les charges placées à droite de la section les réactions de gauche sont les forces extérieures. Ces forces extérieures tournent dans le sens négatif autour du point  $D''$  tant que la charge se trouve entre les points  $A'$  et  $E''$ , puis elles tournent dans le sens positif lorsque la charge a passé le point  $E''$  jusqu'à la section  $CC'$ . Dès que la charge passe à droite de la section  $CC'$ , la force extérieure (réaction de gauche) donne de nouveau un moment négatif autour du point  $D''$ .

Un moment négatif engendre dans la barre de treillis un effort de compression, tandis qu'un moment positif donne un effort de tension. Il résulte de ce qui précède que l'effort de compression maximum s'obtiendra en chargeant les parties  $A'E''$  et  $CB'$ , et l'effort de tension maximum en chargeant la partie  $E''C$ .

Il arrive toujours pour les barres de treillis que l'un des points  $E''$  ou  $F''$  n'est pas à considérer, et on aura à vérifier lequel de ces deux points est nécessaire. Ce n'est que dans le cas où l'un des points tombe à droite et l'autre à gauche de la section  $CC'$  que ces deux points limitent la charge défavorable; la section ne la limite plus alors.

Comme dans le cas de l'arc à paroi pleine, il peut arriver que l'on puisse mener par un nœud deux tangentes à la courbe enveloppe et que ces deux tangentes rencontrent la courbe d'intersection entre les points  $A'$  et  $B'$  (c'est ce qui arrive, Pl. 13, pour une série de membrures voisines des appuis).

Il peut arriver aussi que les tangentes soient imaginaires. Dans la fig. 198, par exemple, le nœud opposé à la 2<sup>e</sup> membrure supérieure tombe à l'intérieur de la courbe, et toute charge placée sur l'arc produit une compression dans cette membrure.

Il va sans dire que dans les arcs à articulations les courbes enveloppes sont remplacées par les points d'appui.

Lorsque les charges défavorables ont été déterminées, on

compose, par une méthode développée plus loin, les réaction et les charges à gauche des sections et on décompose la force extérieure suivant les pièces de la construction. La décomposition graphique est dans ce cas préférable au calcul.

## § 14

### INFLUENCE D'UN CHANGEMENT DE TEMPÉRATURE

Dans tous les arcs, à l'exception des arcs à trois articulations, les forces intérieures se modifient lorsque le métal s'échauffe ou se refroidit. L'influence des variations de température est plus grande dans les arcs sans articulations que dans les autres. Les articulations diminuent cette influence qui disparaît même tout à fait, comme nous venons de le dire si elles sont au nombre de trois.

Il est facile de voir qu'un arc maintenu à ses extrémités ne peut se dilater également dans tous les sens ; quand la température s'élève, l'arc se soulève, tout en conservant la même portée. Cette déformation de l'arc ne peut se produire que sous l'action de deux poussées horizontales, et ce sont ces poussées que nous allons déterminer.

Nous admettrons que toutes les parties de la construction s'échauffent également, parce qu'un échauffement inégal compliquerait trop le problème.

Examinons d'abord le cas d'un arc sans articulation, et supposons, comme précédemment, qu'il soit fixé à droite et libre à gauche ; il prendra une forme semblable à sa forme primitive puisqu'il est libre de se dilater dans toutes les directions, et puisque nous admettons une variation de température uniforme dans toutes les parties de la construction.

Désignons par  $\tau$  le coefficient de dilatation, ou, en d'autres termes, la dilatation de l'unité de longueur pour un degré centigrade, et par  $t$  le nombre des degrés d'augmentation de température. L'allongement de l'arc et celui de chacune de ses parties se fera dans le rapport de 1 à  $1 + \tau t$ . Si la portée d

l'arc est égale à  $l$ , elle sera après l'augmentation de température  $l(1 + \tau t)$ .

L'appui A se déplacera donc horizontalement, si l'appui B est fixe, d'une quantité

$$h = \tau.t.l.$$

Ce déplacement doit être annulé par une poussée horizontale Q, qui ramène l'appui A exactement dans sa position primitive. Il faut donc non seulement que la poussée Q déplace l'appui d'une quantité  $h$ , mais de plus que ce déplacement s'opère sans que l'appui éprouve ni rotation ni mouvement vertical. Un déplacement horizontal remplissant les conditions précédentes équivaut à une rotation autour du point situé à l'infini sur la verticale. Or, d'après le § 6, chaque force produit une rotation autour de son antipôle par rapport à l'ellipse centrale de l'arc : il en résulte que *la poussée Q sera horizontale et passera par le centre de gravité S de l'arc.*

La position de la poussée Q se trouvant ainsi déterminée, il n'y a plus que sa grandeur à calculer.

D'après ce que l'on a vu précédemment, le déplacement horizontal de l'appui A est égal au produit de la poussée Q par le moment centrifuge des éléments  $\frac{\Delta s}{EI}$  et  $\frac{s}{E\omega a^3}$ , par rapport à la force et à l'axe horizontal mené par A.

Le moment centrifuge est le double produit du poids total de l'arc par la distance du centre de gravité à l'un des axes et par la distance de l'antipôle de celui-ci au second axe. Si l'on considère la corde AB de l'arc comme un des axes et l'horizontale menée par S comme second axe, et si l'on détermine l'antipôle X de la ligne AB (voir fig. 194), on aura pour le moment centrifuge, en désignant par  $y_s$  la distance du point S à la ligne AB :

$$\left( \sum \frac{\Delta s}{EI} \right) . y_s . SX$$

Remplaçons le produit  $y_s . SX$  par sa valeur  $r_s^2$ , carré du rayon de l'ellipse centrale, et remplaçons aussi  $\frac{\Delta s}{I}$  par  $\Delta F$  comme précédemment, le moment centrifuge aura pour expression

$$\frac{(\Sigma \Delta F)r_2^2}{E} = \frac{F.r_2^2}{E}$$

ent horizontal dû à la poussée Q sera

$$h = \frac{Q.F.r_2^2}{E}$$

es deux valeurs trouvées pour  $h$ , on arrive, pour izontale due à la variation de température, à

$$Q = \frac{E.\tau.t.l}{F.r_2^2} \quad (18)$$

a de la poussée est un peu différente pour les ations. Sa position est connue, puisqu'elle passe ; elle agit par conséquent suivant la corde AB andeur se détermine par la condition d'invaria- tance des appuis. Si l'appui B est fixe et si l'arc librement, l'appui A se déplacera horizontale- gauche, d'une quantité

$$h = \tau.t.l$$

Q doit produire ce même déplacement en sens déplacement horizontal du point A sous l'ac- ce quelconque est égal, comme nous l'avons vu, la force par le moment centrifuge de l'arc rela- igne AB et à la force. Dans le cas qui nous oc- ent centrifuge est égal à  $\left(\Sigma \frac{\Delta s}{EI}\right) y_s \cdot y_x$ , où  $y_s$  est centre de gravité S,  $y_x$  celle de l'antipôle X par , AB.

ment horizontal du point A sera par suite

$$\Sigma \frac{\Delta s}{EI} y_s \cdot y_x = Q \frac{1}{E} \left( \Sigma \frac{\Delta s}{I} \right) y_s \cdot y_x = \frac{Q.F.y_s.y_x}{E}$$

, valeurs de  $h$ , on trouve que la poussée dans un ions, pour un changement de température  $t$ , est

$$Q = \frac{E.\tau.t.l}{F.y_s.y_x} \quad (19)$$

La valeur de  $Q$  se déterminera par le calcul, de manière à obtenir des kilogrammes ou des tonnes.

Si, comme on l'a déjà fait précédemment, l'on a exprimé les surfaces  $\omega$  en millimètres carrés dans le calcul des  $\Delta F$ , et les longueurs en mètres, il suffira de rapporter le coefficient d'élasticité  $E$  au millimètre carré et d'exprimer la portée  $l$ , les longueurs  $r$ ,  $y$ ,  $y_x$  en mètres ;  $\tau$  et  $t$  sont des coefficients.

Lorsque la poussée  $Q$  due à la température est déterminée, il est facile de calculer les efforts intérieurs de l'arc.

Pour l'arc à paroi pleine, on utilise la formule (17), page 270 ; pour les arcs à treillis, on décompose les efforts graphiquement.

La valeur de  $t$  dépend des variations locales de la température. On admet en général que le montage se fait à une température moyenne et on donne à  $t$  deux valeurs égales, positive et négative. On est ainsi conduit pour la poussée  $Q$  à deux valeurs égales positive ou négative, qui produisent, dans les différentes pièces, de la tension ou de la compression.

### § 13

## ÉPURE D'UN ARC SANS ARTICULATIONS

### *Planche 13*

Après avoir développé ce qui est nécessaire à l'épure d'un arc, nous pouvons passer à la détermination des forces intérieures : nous développerons les constructions sur l'exemple de la planche 13.

Dans les § 8 et 10, tout ce qui se rapporte aux cinq polygones funiculaires, à l'ellipse centrale, aux courbes enveloppes et aux courbes des intersections a été expliqué, et il ne reste plus qu'à indiquer comment on peut, au moyen de ces courbes, déterminer les efforts maximums dans les pièces.

L'arc a été calculé avec un poids propre de 2.600 k<sup>os</sup> et une surcharge de 1.400 k<sup>os</sup> par mètre courant. L'effort sur un montant est par suite de 10.400 k<sup>os</sup> pour la charge permanente et de

5.600 k<sup>os</sup> pour la surcharge. Cette dernière charge a été décomposée pour les 10 montants, à l'échelle de 3<sup>mm</sup> pour 2.000 k<sup>os</sup>, suivant les directions des réactions. La somme de ces réactions est faite dans deux polygones des forces, fig. 8 et fig. 9, pour les réactions de gauche et pour celles de droite. La construction de ces polygones ne nécessite aucune autre explication ; pour opérer le plus simplement possible, on commence par les montants extrêmes et on dispose les triangles les uns à la suite des autres. Il va sans dire que les deux polygones sont symétriques.

En se servant de ces polygones, il est facile de déterminer en grandeur les réactions qui correspondent aux charges d'une série de montants consécutifs. La position de ces réactions s'obtient par des polygones funiculaires, en composant les réactions isolées. Ces polygones ont été tracés dans la planche, au-dessus des arcs, avec les pôles O et O'. La position de la réaction totale, pour une série de charges, s'obtient en prolongeant les côtés extrêmes correspondants du polygone funiculaire, elle passe par l'intersection de ces lignes et sa direction est donnée dans le polygone des forces. Les réactions Q, correspondant à la surcharge totale s'obtiennent de cette manière ; elles sont égales à 41.700<sup>k</sup>. On les a indiquées sur la planche par des flèches.

Considérons maintenant la charge permanente : les réactions ont la direction et la position de celles que nous venons de déterminer pour la surcharge totale, leur grandeur se détermine par une simple proportion. Elles sont toutes les deux égales à :

$$\frac{2.600}{1.400} 41.700 = 77.400^k$$

La réaction de gauche a été portée dans la planche en grandeur et en direction, fig. 10, à l'échelle de 4<sup>mm</sup> par 1.000<sup>k</sup>, ainsi que les poids agissant aux montants 1 à 5. Une décomposition successive par la méthode de Cremona donne les efforts correspondants dans les pièces de l'arc.

La réaction est à décomposer d'abord en trois composantes, agissant dans les deux premières membrures et dans la première barre de treillis ; puis on va de nœud en nœud, en uti-



lisant les forces déterminées précédemment, la détermination des efforts n'est que la moitié de gauche. Les efforts dans les barres à leurs extrémités les numéros de ces barres dans les treillis ont deux numéros.

Tous les efforts dans les membrures sont des tensions, tandis que dans les treillis ce sont des tensions et des compressions.

Dans les barres 1-2, 5-6, 9-10, 13-14, il y a tension ; dans les autres, il y a compression.

Dans les membrures 13 et 14, par exemple (nous reviendrons plus tard), et dans les treillis intermédiaire, les efforts sont de 29.906.800<sup>k</sup>.

L'addition des efforts dus au poids propre et charge montre si ce sont les efforts de compression ou de tension qui l'emportent.

L'effort maximum en valeur absolue, dans la membrure, est l'effort de compression quand la charge propre et charge l'emportent sur la compression dans la pièce, il sera un effort de tension le cas contraire.

Au moyen du pôle  $O^*$  et des efforts dans les barres on a tracé la ligne de pression correspondante. Cette ligne de pression passe, comme toujours, au-dessus de la fibre moyenne dans les membrures, et en dessous aux naissances.

Les forces intérieures dues à la surcharge ne sont pas aussi facilement déterminées que celles de la charge propre. Il y a à déterminer d'abord la charge définitive. Nous avons vu § 13 comment on y parvient.

Dans la planche 13, les constructions pour les membrures coupées par la section  $CC'$ , c'est-à-dire pour les membrures 13, 14 et pour la barre de treillis 13-14. A cet effet, on a mené par un point d'un cercle, des tangentes à la courbe enveloppe de ces sections de ces tangentes avec la courbe d'enveloppe ont été désignées par les n° 13, 14 et 13-14. On voit que la membrure inférieure 13 subit une compression.

pression maximum lorsque la charge s'étend du montant 5 au montant 10. La section CC' étant située à gauche de cette charge, la force extérieure est égale à la résultante de toutes les réactions de gauche des charges 5 à 10. La position de cette résultante est indiquée dans la planche par une flèche et par 5-10. Elle a été décomposée en deux composantes, fig. 8; l'une dirigée suivant la membrure 13, l'autre passant par le nœud opposé à cette membrure. L'effort de compression maximum cherché est tracé en trait fort dans le polygone des forces; il porte le n° 13 et est égal à 25.800<sup>k</sup>.

Si l'on veut déterminer l'effort de tension maximum dans la pièce 13, on peut suivre deux méthodes. Ou bien, on charge l'arc du point 1 au point 4, comme nous venons de le faire; ou bien on multiplie par le rapport  $\frac{1.400}{2.600}$  l'effort engendré par le poids propre et l'on retranche du résultat l'effort maximum de compression. Le second procédé est le plus rapide; mais le premier a l'avantage de donner une vérification par l'addition des deux efforts maximums trouvés pour la compression et la tension: leur somme doit être égale au produit de l'effort dû à la charge permanente par le rapport  $\frac{2.600}{1.400}$ .

On détermine de la même manière les efforts qui agissent dans la membrure supérieure 14. Pour celle-ci, la charge défavorable s'étend de 1 à 5.

La section CC' étant située dans la partie chargée, la force extérieure s'obtiendra en déterminant la réaction de gauche des charges 1 à 5 et en composant cette réaction avec les charges 1 à 3. On arrive au même résultat en composant la réaction de droite des charges 1 à 3 avec la réaction de gauche des charges 4 à 5. Cette dernière composition est indiquée sur la planche, fig. 9. La grandeur et la direction des réactions se déterminent dans le polygone des forces, leurs positions se construisent par les deux polygones funiculaires.

Pour composer les deux réactions, celle des charges 4 et 5 a été mesurée dans le polygone des réactions de gauche et a été composée dans le polygone des réactions de droite (fig. 9) avec la réaction des charges 1-3. La composante des deux

réactions se trouve ainsi déterminée en grandeur et en direction. La position des réactions et de leur composante est donnée par des flèches qui portent les numéros correspondants. Comme précédemment, la force extérieure a été décomposée suivant la direction de la membrure 14 et suivant une force passant par le nœud opposé à cette membrure. L'effort dans la membrure 14 se trouve ainsi déterminé ( $25.300^k$ ) et il est tracé en trait plein dans le polygone des forces.

En troisième lieu, l'effort de tension maximum dans la barre de treillis 13-14 s'obtient en chargeant les montants 4 et 5 (le point intercepté à gauche sur la ligne des intersections est seul à considérer). La réaction de gauche des charges 4 et 5 est la force extérieure ; sa position a été déterminée dans le calcul de la membrure 14. La décomposition des forces a été faite dans le polygone des réactions de gauche ; elle donne l'effort désigné par 13-14 et ayant une valeur de  $7.900^k$ .

On déterminerait de la même manière, comme nous venons de le faire pour la section CC', l'effort intérieur de toutes les autres pièces de l'arc ; ce travail ne présente aucune difficulté, mais il demande beaucoup de soin.

Il est bon de déterminer tout d'abord pour toutes les membrures et pour les treillis un diagramme des charges défavorables, sur lequel on indiquera par des traits forts l'étendue des charges. Puis on déterminera successivement les efforts dans les membrures inférieures, ceux des membrures supérieures et enfin ceux des barres de treillis.

Toutes les constructions se feront de la même manière que celles que nous avons données pour l'une des sections. Les compositions et les décompositions des efforts peuvent se faire dans les polygones des réactions comme nous l'avons déjà fait précédemment ; mais on peut aussi construire séparément un polygone des forces spécial à chaque cas, ce qui est préférable lorsqu'on a un grand nombre de pièces à considérer.

Quand le nombre des pièces sera trop grand, il sera permis de ne calculer les efforts que de 2 en 2 ou de 3 en 3 pièces et d'en déduire ceux des autres pièces par interpolation.

Il reste à déterminer l'influence des variations de température.

Nous avons vu que la poussée horizontale due à la température passe par le point S; elle se calcule par la formule (18).

En posant  $E = 20.000$ ,  $\tau = 0,000012$ ,  $t = \pm 30^\circ$ ,  $l = 39^m$ ,  $F = 0,01017$  (voir pages 251 et 252) et  $r_2 = 1^m,88$ , on trouve :

$$Q = \pm 7800 \text{ k.}$$

Cette poussée est donnée à la partie inférieure de la planche, fig. 11, son influence sur les différentes pièces de la construction se détermine par des décompositions successives, exactement comme pour la charge permanente. Les efforts qu'elle engendre sont aussi numérotés de la même manière que ceux de la charge permanente. Une augmentation de température produit une compression dans les membrures supérieures, 2 à 12, et dans les membrures inférieures, 11 à 21, tandis que toutes les autres membrures sont tendues. Dans les barres de treillis, il y a alternativement compression et tension, excepté cependant à la clef. Les efforts les plus grands se produisent dans les membrures voisines des appuis.

Les membrures 13 et 14 subissent des efforts de  $6.000^k$  et de  $2.300^k$ ; la barre de treillis 13-14 un effort de  $4.800^k$ .

Il est bon de grouper séparément les résultats obtenus avec le poids propre, la surcharge et la température, pour la membrure supérieure, pour la membrure inférieure et pour les barres de treillis. On peut le faire par le tracé de courbes, en portant les efforts comme ordonnées; on découvre ainsi aisément les fautes de construction. En traçant aussi la courbe correspondant aux efforts que les pièces sont à même de porter, on verra quelles sont celles qui sont trop fortes ou trop faibles. Nous n'avons pas indiqué ces courbes dans la planche; notre but n'était pas de vérifier la résistance de l'arc considéré, mais de développer les constructions de l'épure de résistance.

Il reste à faire la somme des efforts obtenus. Pour la membrure inférieure, 13 par exemple, l'effort total est égal à

$$29.900 + 25.800 + 6.000 = 61.700^k$$

La section nette de cette membrure étant de  $7.900^{mm^2}$  le coefficient de travail correspondant est de

$$\frac{61.700}{7.900} = 7^k,8 \text{ par m}$$

L'effort total dans la membrure supé

$$37.100 + 25.300 + 2.300 =$$

le coefficient de travail est de

$$\frac{64.700}{9.000} = 7^k,2 \text{ par m}$$

L'effort dans la barre de treillis 13-14

$$6.800 + 7.900 + 4.800 =$$

le coefficient de travail

$$\frac{19.500}{3.000} = 6^k,5 \text{ par m}$$

Comme nous l'avons vu, les efforts se terminent directement ou par différence directement au moyen des nombres trouvés arrive aux résultats suivants :

La surcharge totale donne dans la membrure 13, compression de  $\frac{1.400}{2.600} \times 29.900 = 16.000$

Dans la membrure 14, un effort de

Dans la barre de treillis 13-14, un effort de 3.700<sup>k</sup>.

En retranchant ces efforts des efforts trouvés on trouve les efforts suivants :

Membrure inférieure, 13 : une tension  
Membrure supérieure, 14 : une tension  
Barre de treillis, 13 — 14 : une compression

En additionnant ces efforts, ceux de la température, on trouve

Membrure 13, pression minima : 29.900  
Membrure 14, " : 37.100  
Barre de treillis 13-14, " : — 6.800

Lorsqu'on fait les calculs pour toutes les pièces du arc, on a soin de les disposer en tableau, en donnant aux efforts de tension le signe + et aux efforts de compression le signe —.

§ 16

ÉPURE D'UN ARC A DEUX ARTICULATIONS SUR  
LES APPUIS

*Planche 14*

Dans la planche 14, se trouvent développées les constructions et les calculs des forces intérieures d'un arc à articulations sur les appuis.

L'arc porte une charge permanente de  $1.750^k$  et une charge de  $550^k$  par mètre courant. Les pièces de pont ont un espacement de  $1^m,75$ , la charge en chacun des nœuds est donc de  $3.060^k$  et la surcharge de  $960^k$ .

Au § 11, nous avons vu de quelle manière la ligne des intersections des réactions a été tracée; au moyen de cette ligne on détermine facilement les réactions correspondant à la charge donnée.

Comme dans la Pl. 13, on a construit les deux polygones des réactions de droite et des réactions de gauche pour les montants, fig. 6 et 7, (les charges des montants extrêmes sont la moitié des autres). L'échelle des forces est de  $1^m$  pour  $2$  (c'est par hasard que les extrémités des polygones se confondent). Toutes les réactions passent par les appuis; leur position est par suite déterminée lorsqu'on connaît leur grandeur et leur direction.

La réaction de la surcharge totale est égale à  $26.000^k$ , c'est-à-dire de la charge permanente à  $\frac{1.750}{550} \times 26.000 = 82.700^k$ .

Cette dernière a été portée au bas de la planche à droite, fig. 8, avec les 14 efforts sur les montants, à l'échelle de  $1^m$  pour  $500^k$ . En faisant la décomposition des efforts successivement de nœud en nœud, on détermine les efforts engendrés par la charge permanente dans toutes les pièces de l'arc. Les efforts sont désignés, quand la place le permet, par les numéros des pièces correspondantes. Les membrures et les montants sont comprimés, les treillis sont tendus. En tenant compte de la surcharge défavorable, les membrures et

montants sont encore comprimés par l'effort des barres de treillis sont tendues.

Dans la section CC', par exemple, les membrures sont soumises à des efforts de compression 6.500<sup>k</sup>, et la barre de treillis 10-11 à un effort 4.000<sup>k</sup>.

Comme dans la Pl. 13, nous avons tracé la section correspondant à la charge totale; elle s'appelle le polygone funiculaire des charges permanentes des montants, avec le point O\* comme pôle. La section passe à la clef, au-dessus de la ligne de gravité; c'est ce qui est généralement le cas; au point elle ne sort du noyau central; dans la paroi pleine, la charge permanente ne développe que de faibles efforts de compression; de plus, l'effort de compression est plus grand en valeur absolue dans la partie supérieure que l'effort de tension maxima, aussi bien pour la partie supérieure que pour la partie inférieure des sections.

S'il ne s'agit que de trouver le plus grand effort de compression absolue, sans tenir compte des variations de la section, on pourra donc se contenter de calculer l'effort de compression maxima.

La compression produite par le poids propre de la paroi pleine de l'arc, se calcule comme nous l'avons fait pour la section 16 par exemple: on mesure les distances des points extrêmes du noyau central à la ligne de gravité (ces distances ne sont pas très exactes, l'échelle est très petite); elles sont de  $q = 22^{\text{mm}}$  pour le point supérieur et  $q' = 150^{\text{mm}}$  pour le point inférieur; puis des poids propres on mesure la longueur du rayon qui part de O\*; il représente un effort de 76.6 tonnes.

En introduisant cette valeur dans la formule (1) avec les valeurs  $\omega = 27.500^{\text{mm}^2}$ ,  $k = 0^{\text{mm}}, 19$  on trouve les coefficients de travail suivants:

Pour la fibre extrême inférieure,

$$R = \frac{76.600 \times 0,22}{27.500 \times 0,19} = 3^{\text{k}}, 2 \text{ par mm}^2$$

et pour la fibre extrême supérieure,

$$R' = \frac{76.600 \times 0,15}{27.500 \times 0,18} = 2^k,3 \text{ par m/m}^2$$

Les produits  $\omega k$  et  $\omega k'$  peuvent se remplacer par les moments de résistance de la section, mais il faut, lorsque cette dernière est dissymétrique, prendre deux valeurs différentes, l'une pour le haut, l'autre pour le bas.

L'influence de la surcharge se détermine très simplement ; prenons par exemple une section CC' qui rencontre trois pièces. Par la méthode du § 13, on détermine les charges défavorables de ces pièces : la charge défavorable de la membrure 10 s'étend du montant 1 au montant 16 ; celle de la membrure 11 du montant 14 au montant 22 ; celle de la barre de treillis 10-11 du montant 13 au montant 22.

Ces charges donnent les efforts de compression maximum dans les membrures et l'effort de tension maximum dans la barre de treillis.

La réaction de droite des charges 1 à 16 représente la force extérieure pour la membrure 10 ; la position de cette force est indiquée aux environs de la section. En décomposant celle-ci suivant les directions des trois pièces coupées, on obtient l'effort dans la membrure ; cet effort est tracé en trait plein dans le polygone des réactions de droite, il porte le n° 10 et est égal à 26.700<sup>k</sup>. Nous avons déterminé de la même manière les efforts dans la membrure 11 et dans la barre de treillis 10-11 : le premier de ces efforts s'obtient en divisant la charge en deux parties, l'une à droite et l'autre à gauche de la section CC', en déterminant la réaction de droite correspondant aux charges 14 à 17 et celle de gauche des charges 18 à 22, puis en composant ces deux réactions en une seule résultante qui est la force extérieure. Celle-ci se décompose, comme nous l'avons déjà fait, suivant les trois directions ; l'une de ces forces est l'effort 11, il est de 11.200<sup>k</sup>.

La charge qui sert au calcul de la barre de treillis a été aussi décomposée en deux parties, 13 à 17 et 18 à 22 ; la réaction de droite de la première de ces parties et la réaction de gauche de la seconde ont été composées comme cela est indi-



qué par 3 flèches au-dessus de la membrure composition suivant trois directions nous a de 11 égal à 4.100<sup>kg</sup>.

Dans la partie pleine de l'arc, les charges détiennent au moyen des points extrêmes du noy la membrure inférieure de l'élément 16, cette du montant 11 au montant 22, pour la membr du montant 1 au montant 11.

La force extérieure se détermine comme on la mesure à l'échelle et on calcule les coefficients au moyen de la formule (17).

On trouve pour la membrure inférieure

$$R = \frac{14.200 \times 0,91}{27.500 \times 0,19} = 2,5 \text{ par m/m}^2$$

pour la membrure supérieure :

$$R' = \frac{11.900 \times 0,94}{27.500 \times 0,18} = 2,3 \text{ par m/m}^2$$

Il nous reste à parler de l'influence de la température poussée se calcule par la formule (19) ; en faisant  $\alpha = 0,000012$ ,  $t = \pm 30^\circ$ ,  $l = 36,75$ ,  $F = 0,009$ ,  $y = 3^m,54$ , on trouve  $Q = 2.450^k$ . Cette poussée de corde de l'arc ; nous l'avons décomposée à la p fig. 9, par la méthode connue. Son influence sur les efforts de la partie pleine se détermine en m de levier  $q$  et en se servant de la formule (17) cette manière les efforts suivants :

Membrure 10	6.200 k.
» 11	5.500 k.
Barre de treillis 10-11	2.400 k.

Dans l'élément 16

$$R = \pm 1^k,7$$

En réunissant les efforts dus à la charge la surcharge et à la température, on obtient les suivants :

Membrure 10	compression	74.700 + 26.700 +
» 11	»	6.500 + 11.200 +
Barre de treillis 10-11	tension	4.000 + 4.100 +

## APPROXIMATIF — ARC SANS ARTICULATION 287

de ces pièces et les coefficients de travail sont

section	17.300 m/m <sup>2</sup>	coefficient de travail,	6k,8 par m/m <sup>2</sup>
»	8.300	»	2k,8
»	4.400	»	2k,4

ant 16, le moment rapporté au point extrême  
noyau central (en tenant compte de la charge  
la surcharge et de la température) est égal à

$$16.900 + 12.900 + 9.100 = 38.900$$

rapporté au point extrême inférieur du noyau  
à

$$11.500 + 11.200 + 8.200 = 30.900$$

ant de 27 500<sup>m<sup>2</sup></sup> et les distances des points ex-  
tau central de  $k=0,19$  et  $k'=0,18$ , on trouve  
ent de travail total :

extrême inférieure,

$$R = \frac{38.900}{27.500 \times 0,19} = 7k,4 \text{ par m/m}^2$$

extrême supérieure,

$$R' = \frac{30.900}{27.500 \times 0,18} = 6k,3 \text{ par m/m}^2$$

tion des efforts minimums se fait comme nous  
dans le paragraphe précédent.

s à la température sont toujours à ajouter aux

### § 17.

## APPROXIMATIF D'UN ARC SANS ARTI- CULATION

qui précède, les calculs s'appliquent à un arc  
sions sont supposées connues. La détermina-  
1F, et par suite aussi la construction des poly-  
es, des lignes enveloppes des réactions et de la

ligne des intersections des réactions, ne peut avoir lieu qu'en se basant sur des sections données. Les méthodes qui précèdent suffisent à la vérification de résistance d'un projet défini, mais elles sont insuffisantes pour l'établissement d'un projet. Il faudrait déterminer d'abord, par une méthode approximative, les sections des pièces et appliquer ensuite la méthode exacte. On sera conduit ainsi, suivant les besoins, à augmenter ou à réduire les sections.

La méthode approximative pour la détermination des sections est la suivante. Nous la développerons d'abord pour un arc à paroi pleine.

Dans la plupart des arcs à paroi pleine, la section croît de la clef aux naissances. Nous admettrons que le moment d'inertie des sections croît, en allant de la clef aux appuis, dans le rapport  $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ ,  $\Delta s$  étant la longueur d'un élément,  $\Delta x$  la longueur de sa projection horizontale. Nous admettrons de plus que le rayon de giration  $r$  est constant, et que l'axe de l'arc est une parabole.

On arrive, en faisant ces hypothèses, à des formules simples pour la courbe enveloppe et pour la courbe des intersections des réactions. Ces courbes peuvent se tracer sans qu'il soit nécessaire de connaître les sections.

Le moment d'inertie  $I$  en un point de l'arc s'exprime par

$$I = I' \frac{\Delta s}{\Delta x} \quad (20)$$

$I'$  étant le moment d'inertie de l'arc à la clef.

Le poids d'un élément est égal à

$$\Delta F = \frac{\Delta s}{I} = \frac{\Delta x}{I'} \quad (21)$$

Le poids total ou la somme des  $\Delta F$  a pour expression

$$F = \Sigma \Delta F = \frac{l}{I'} = \frac{2a}{I'} \quad (22)$$

$l$  désignant la corde de l'arc et  $a$  la demi-corde.

En faisant passer par le point S deux axes perpendiculaires

age 255), comme précédemment, et en désignant par  $s$  l'ordonnée du sommet de l'arc, l'axe de l'arc est

$$y = s - \frac{fx^2}{a^2}$$

erminer la valeur de  $s$ , nous calculons les moments des éléments  $\Delta F$  autour de l'axe des  $x$  et nous sommes à zéro :

$$\bullet \quad \Sigma \Delta F \cdot y = \Sigma \frac{\Delta x}{l'} \left( s - \frac{fx^2}{a^2} \right) = 0$$

ant  $\Delta x$  par  $dx$ , la sommation par l'intégration, en tenant compte de  $l'$  constant

$$\int \left( s - \frac{fx^2}{a^2} \right) dx = 0$$

il doit se faire de  $-a$  à  $+a$  et donne

$$s = \frac{1}{3} f.$$

n de l'axe de l'arc devient

$$y = \frac{f(a^2 - 3x^2)}{3a^2} \quad (23)$$

de la même manière les demi-diamètres  $r_1$  et  $r_2$  se centrale. Comme la flèche de l'arc est faible, admettre pour les éléments de l'arc (voir fig. 182, que le petit axe de leur ellipse ( $r$ ) est vertical au lieu d'être horizontal, et que le grand axe  $\left( \sqrt{\frac{E}{G}} r \right)$  est horizontal.

de hypothèse, le moment d'inertie d'un élément de l'arc par rapport à l'axe des  $y$  est égal à

$$\Delta F (x^2 + \frac{E}{G} r^2)$$

le moment d'inertie rapporté à l'axe des  $x$  est

$$\Delta F (y^2 + r^2)$$

En faisant pour  $\Delta F$  et  $y$  les valeurs des formules (21) et en faisant la somme des éléments, on trouve

$$F.r_1^2 = \sum \frac{\Delta x}{l'} (x^2 + \frac{E}{G} r^2)$$

et

$$F.r_2^2 = \sum \frac{\Delta x}{l'} \left\{ \frac{f^2 (a^2 - 3x^2)^2}{9a^4} + r^2 \right.$$

l'intégrale de  $-a$  à  $+a$ , en tenant compte de  
donne

$$r_1^2 = \frac{1}{3} a^2 + \frac{E}{G} r^2$$

et

$$r_2^2 = \frac{4}{45} f^2 + r^2$$

Il s'agit maintenant de calculer les valeurs  
la Pl. 13. En désignant par  $w$  l'abscisse des  
par rapport à l'axe S, fig. 193, page 255, le  $n$   
d'un élément est égal à

$$\Delta F (x-w) = \frac{\Delta s}{l'} (x-w)$$

$u_1$  H est le moment statique des éléments  
de P.

En intégrant de  $w$  à  $a$ , il vient :

$$H.u_1 = \frac{1}{l'} \left( \frac{1}{2} a^2 - aw + \frac{1}{2} w^2 \right) = \frac{(a-w)}{2l'}$$

L'ordonnée  $u_2$  du troisième polygone funicu  
le moment statique des segments coupés par l  
gone sur l'axe des ordonnées. Ces segments co  
forces sont appliqués aux antipôles de l'axe  
c'est-à-dire à une distance  $\frac{Er^2}{Gx}$  en dessous du ca  
On détermine donc le produit  $u_1.H.c_1$  en faisant  
expressions

$$\Delta F . x . \left( x - w + \frac{Er^2}{Gx} \right) = \frac{\Delta x}{l'} . x \left( x - w + \right.$$

de  $w$  à  $a$ , et l'on trouve

$$H.c_1.u_2 = \frac{(a-w)^2 (2a+w)}{6.l'} + \frac{a-w}{l'} \frac{E}{G}$$

$M_2$  représente le moment centrifuge des éléments par rapport aux deux axes coordonnés. Ce moment pour un élément est égal à

$$\Delta F \cdot y (x - w) = \frac{\Delta x}{l'} \cdot y (x - w)$$

En partant de la formule (23), on trouve

$$H \cdot c_2 \cdot u_2 = - \frac{(a^2 - w^2)^2 f}{12a^2 \cdot l'}$$

En partant par K, fig. 193, page 255, le point d'intersection de la charge P avec l'axe des  $x$ , on trouve la distance KS au moyen de la formule (16), page 257.

$$KS = - \frac{r_1^2 \cdot u_1}{c_1 \cdot u_2} = - \frac{(a^2 + 3 \frac{E}{G} r^2) (a - w)}{(a - w) (2a + w) + 6 \frac{E}{G} r^2} \quad (26)$$

Dans cette expression,  $\frac{E}{G} r^2$  est dans la plupart des cas très petit en rapport à  $a^2$  et peut être négligé au numérateur. La valeur de  $r^2$  au dénominateur n'est pas petite au moment où  $w = a$ , mais elle diminue rapidement vers la gauche, la direction de la réaction de gauche, pour une position de l'appui de droite, a peu d'influence sur le calcul de l'arc, et l'on peut aussi négliger ce terme au dénominateur. On aura ainsi :

$$KS = - \frac{a^2}{2a + w} \quad (27)$$

On néglige l'influence des efforts tranchants dans le calcul, ce qui revient à supposer à G une valeur infiniment petite. La formule (26) se transforme et l'on retombe sur la formule (27); on voit donc que, même dans un calcul exact de moments que nous avons supprimés pourraient l'être, ce n'est que dans le cas où  $r$  serait très grand relativement à  $l$  que les termes négligés pourraient avoir une influence.

Le moment sur l'axe des  $y$  se détermine d'après la formule (16), page 257



remplaçant  $\frac{1}{45}f^2 + r^2$  par  $\frac{1}{6}fm$  (formule 29), il

$$-(2a + w)mx + (a + w)^2y = a^2m.$$

idère  $w$  comme le paramètre variable et si différentielle, on peut éliminer  $w$  des deux on obtient l'équation de la courbe enveloppe

tion donne

$$-mx + 2(a + w)y = 0$$

on trouve

$$mx^2 + 4axy + 4a^2y = 0 \quad (30)$$

$$x + a)(mx + 4ay - am) + a^2m = 0. \quad (31)$$

n représente une hyperbole qui passe par le comme asymptotes les lignes

$$= 0 \quad \text{et} \quad mx + 4ay - am = 0$$

intersections et la courbe enveloppe sont re-  
la fig. 199. La première est une droite hori-  
née à une distance  $m = \frac{8}{45}f + \frac{6r^2}{f}$  du centre de  
rticale du point A est une des asymptotes de  
loppe de gauche, l'autre asymptote se déter-  
ax points  $x = -a$  et  $y = \frac{1}{2}m$  et  $x = +a, y = 0$ .  
e divise la distance TA' en deux partie égales.  
rizontale menée par le point S, de plus elle  
nt T'. Le point O est le centre de l'hyperbole et  
gente.

les hyperboles coupent sur des sécantes des  
t, cette propriété permet de tracer rapidement  
termine d'abord le point S situé à une hauteur  
la corde de l'arc ; puis on trace TT' et A'B' à  
de TT' : on divise TA' en deux parties égales,



## CHAPITRE VI — ARCS MÉTALLIQUES

l', et au moyen de la propriété  
t autant de points qu'il en faut.

On peut tracer complètement l'hyperbole  
partie située à gauche et en dedans  
et la courbe symétriquement à droite.  
complète.

On peut déterminer la poussée due à la charge  
est donnée, page 275, formule (4).  
formule, d'après les formules (2) et (3).

On trouve

$$Q = \frac{E \cdot \sigma \cdot t \cdot l'}{\frac{1}{15} f^2 + r^2}$$

que nous venons de déterminer pour l'arc  
pleine ; mais les résultats peuvent être appliqués aux  
arcs à treillis, en remplaçant le demi-espacement des  
par le demi-espacement des diagonales.  
se que nous avons faite (des diagonales).  
écartement des membrures correspondantes.  
et, et l'on est conduit en général à la même  
formule.

On peut compléter d'un projet d'arc se 1

On a fait choix des dispositions des  
1, de la charge permanente et de la charge  
nier calcul approximatif des dimensions.  
la méthode que nous venons d'indiquer.  
ul de connaître les charges. Lorsqu'on  
ne néglige les barres de treillis. On a  
un petit nombre de points seulement.  
s on fait des interpolations.

On a arcs à paroi pleine, la distance  
ral à la fibre moyenne peut être déterminée  
leur de l'arc.

terminer l'influence de la température qui exige un ent de section, on commence par adopter un rend de 15 à 25 % à la clef et l'on calcule le moment en ce point, sans déduire les trous de rivets. En nt cette valeur de  $I'$  dans la formule (32), on trouve approximative de  $Q$ . On peut ensuite déterminer les endrés par cette force et modifier la section admise il y a lieu.

es sections obtenues serviront à faire l'épure défi-

é d'exactitude de notre méthode approchée n'est pas dans tous les cas, cela va sans dire. Les résultats ant plus exacts que la variation des moments d'inertie roche plus de l'hypothèse qui a été faite. Un grand 'exemples calculés par cette méthode ont donné une très suffisante, et les sections calculées par la méthode n'ont eu à subir que de très faibles modifications du calcul exact. S'il n'en était pas ainsi, on se it à refaire une troisième épure.

## § 18

### APPROXIMATIF D'UN ARC A ARTICULATIONS SUR LES APPUIS

à articulations sur les appuis se calculent approximativement d'une manière analogue à celle des arcs sans articulation l'on détermine ainsi les éléments du calcul définissant deux cas à distinguer.

1<sup>re</sup> — Cas de la variation du moment d'inertie dans le

2<sup>de</sup> — Cas, qui correspond à une légère augmentation de

3<sup>e</sup> — Cas, pour les appuis, n'est pas exacte pour les arcs à tympan comme celui de la Pl. 14 ; le moment d'inertie varie entre deux limites très différentes, et le calcul approché est

plus exact en faisant l'hypothèse à la clef. Mais l'articulation à la nage de l'axe de la membrure moyenne. Dans cette hypothèse, passent par les trois articulation également ; il en résulte que la réactions se compose de deux direction à la clef et par les deux artic

Une autre méthode consiste à a supérieures et inférieures une section constante et à faire le calcul dans cette hypothèse. Cette méthode s'applique à toutes les formes d'arcs, mais elle est plus longue que l'autre.

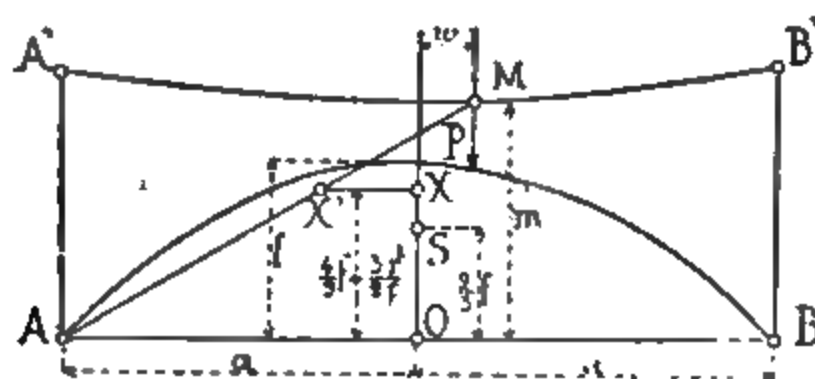


Fig. 200.

Dans le cas où l'arc a une section d'une hauteur à peu près constante, avec la voie portée par de simples montants, on conservera la méthode du paragraphe précédent et l'on posera

$$I = r' \frac{\Delta s}{\Delta x}$$

Les éléments de poids seront

$$\Delta F = \frac{\Delta s}{l} = \frac{\Delta x}{r'}$$

On prendra comme axe de l'arc une parabole et on supposera que le demi-axe  $r$  de l'ellipse d'inertie est constant. La forme de la courbe des intersections peut alors se calculer.

d, en désignant par  $l$  la portée, par  $a$  la demi-ave comme au § 17, page 288 :

$$\Sigma \Delta F = F = \frac{l}{l'} = \frac{2a}{l'}$$

par le milieu de la corde AB deux axes coordination de l'axe de l'arc sera

$$y = f - \frac{fx^2}{a^2}$$

du centre de gravité (en vertu du calcul du § a

$$y_s = \frac{2}{3} f$$

u petit axe vertical de l'ellipse centrale

$$r_s^2 = \frac{4}{45} f^2 + r^2$$

par  $y_x$  l'ordonnée de l'antipôle de l'axe AB, on

$$r_s^2 = y_s (y_x - y_a)$$

$$y_x = \frac{1}{5} f + \frac{3}{2} \frac{r^2}{f} \quad (33)$$

es segments  $u$  du deuxième polygone funiculaire fait en considérant  $u$  comme le moment centres situés à droite de la charge par rapport à la force. On trouve, en fonction des distances  $l_s$  :

$$H . y_s . u = \Sigma \Delta F . y (x - w)$$

$\Delta F$  par  $\frac{dx}{l'}$  et le signe  $\Sigma$  par le signe d'intégration de  $w$  à  $a$ , on trouve

$$H . y_s . u = \frac{(a-w)^2 (3a+w)f}{12a^2 l'}$$

$$H = F = \frac{2a}{l'} \text{ et } y_s = \frac{2}{3} f$$

$$u = \frac{(a-w)^2 (3a+w)}{12a^2 l'}$$

## CHAPITRE VI — ARCS MÉTALLIQUES

ance  $XX'$  (fig. 194, page 264 et page 265 :

$$u' = \frac{l}{b} \cdot u$$

a distance de la charge à l'appui d'après nos nouvelles désignations

$$u' = \frac{2a}{a-w} \cdot u = \frac{(a-w)^2 (3a+w)}{8a^2}$$

ns de plus, fig. 200, l'intersection de la charge par  $M$  et l'ordonnée  $mx$  nous

$$\frac{a-u'}{yx} = \frac{a+w}{m}$$

isant cette valeur et en transformant on trouve :

$$m = \frac{8a^2 yx}{5a^2 - w^2} = \frac{4a^2 (8f^2 + 15r^2)}{5 (5a^2 - w^2) f}$$

en de cette formule, on peut déterminer correspondant à plusieurs abscisses  $x$  que l'on obtient est du 3<sup>e</sup> degré du à la température s'obtient par

$$Q = \frac{E \cdot \tau \cdot t \cdot I'}{\frac{8}{15} f^2 + r^2}$$

ant cette formule à celle de l'arc (fig. 2), on reconnaît que l'effort est le même que dans le cas précédent ; la poussée  $Q$  agit il est vrai plus haut, avec un bras  $m$  ; néanmoins, comme nous l'avons vu, la température est plus grande que dans les arcs à articulation ; l'influence de la température diminue, et l'inconvénient de cette articulation diminue quand la flèche

question de savoir quel est le système d'arc le plus économique avec ou sans articulations ne peut se résoudre d'une manière générale ; elle dépend du cas considéré.

Les formules que nous venons de trouver pour des arcs à paroi pleine s'appliquent aux arcs à treillis, en remplaçant  $r$  par le demi-écartement des membrures.

Lorsque  $r$  ou l'écartement des membrures est variable, on adopte dans les formules (34) et (35) une valeur moyenne.

Quant au calcul d'un arc à articulations, la marche à suivre est la même que celle indiquée, page 294, pour un arc sans articulations ; mais l'influence de la température se réduit à 5 ou 10 0/0.

## § 19

### COMPLÈT

## CALCUL APPROXIMATIF D'UN ARC A DEUX ARTICULATIONS ET A PAROI PLEINE

(Planches 15 et 16)

Dans les planches 15 et 16, nous donnons l'épure complète d'un arc à paroi pleine, de forme parabolique, et supportant une demi-voie de chemin de fer.

L'épure de la planche 15 est l'épure de résistance ; elle comprend l'étude des charges défavorables, c'est-à-dire du nombre et de la position des essieux qui développent les efforts maximums dans les différentes parties de l'arc.

Nous résumerons dans un tableau, page 308, tous les coefficients de travail ; ils établissent l'influence relative de la charge permanente, de la surcharge et de la température.

La planche 16 est l'épure des déformations ; nous y avons construit les déformations verticales de l'arc pour les charges et pour une variation de température de 30°.

## CHAPITRE VI — ARCS

### I. Donnée

l'arc. 50<sup>m</sup>,00.

mesurée jusqu'à la fibre

nt des points d'appui de  
ermanente par mètre co  
it, 1.200 kilogrammes.  
rge se compose de locon

permanente par mont

$$1200 \times 2,5 = 3000$$

### Détermination approxin

ssaire, pour appliquer l  
ode de vérification des  
er par une méthode app  
ints de l'arc. Cette déte  
qué au § 18, page 295,  
des intersections des re  
e due à la température  
le reste, on procède cc  
nsons qu'il est inutile  
première détermination  
xaminer les cas de la  
e. Une grande partie  
calcul, et l'on arrive vit

## III. Éléments du calcul de l'arc

Section de l'arc n°	Épaisseur des semelles, mm	$v$	$I$	$r = \sqrt{\frac{I}{s}}$	Longueur des éléments $\Delta s$	$\frac{\Delta s}{1}$	$\frac{\Delta s}{\omega}$
070225	40	0,6775	0,023.999	0,585	2,67	111	■
069475	40	0,6525	0,022.087	0,564	2,64	120	98
072725	44	0,6315	0,021.845	0,548	2,61	119	36
071975	44	0,6065	0,019.982	0,527	2,57	128,5	35,7
081225	54	0,5915	0,021.636	0,515	2,55	118	31,3
080475	54	0,5665	0,019.666	0,494	2,54	129,5	31,5
081725	56	0,5435	0,018.372	0,474	2,53	138	31
080975	56	0,5185	0,016.549	0,451	2,52	152	31,2
080225	56	0,4935	0,014.827	0,428	2,51	169	31,2
079475	56	0,4685	0,013.213	0,408	2,50	189	31,5
					25,64	1374,0	335,4

Les sections des sections sont exprimées en mètres carrés, tout comme à ce qui a été fait dans les épures 13 et 14, où elles sont exprimées en millimètres carrés.

L'arc a été divisé en 20 éléments numérotés dans l'épure entre les points d'appui des charges. Les valeurs données dans le tableau pour les moments d'inertie  $I$ , les distances  $v$  de la fibre extrême au centre de gravité, les longueurs des éléments mesurées dans la fibre moyenne et les angles  $\Delta s$ .

On déterminera les efforts dans les 5 sections indiquées par les chiffres romains dans la fig. 1.

## Construction de la ligne des intersections des réactions

La construction de cette ligne se fait au moyen des polygones funiculaires (fig. 2) et des 3 polygones funiculaires 1, 2, 3, 4, 5 (voir § 11, page 260).



Dans les polygones 1 et 3, on a pris pour échelle double de celle de la fig. 4.

La construction du point 6 de la ligne des intersections des réactions est la seule qui soit indiquée complètement sur l'épure.

Le troisième polygone funiculaire détermine le point X, antipôle de la ligne  $OO'$  des appuis relativement à l'ellipse centrale; il est situé à une distance  $y_x = 4,43$  de la ligne  $OO'$ .

### V. Charge permanente

Dans la fig. 6, on a déterminé, à la suite les unes des autres, dans leur ordre, toutes les réactions de l'appui de gauche correspondant à une charge de 10.000 k. placée successivement en chacun des points d'appui sur l'arc; il suffit, pour cela, de décomposer la charge au point F, où elle rencontre la ligne des intersections des réactions, en deux forces passant par les points O et O'.

La réaction correspondant à la charge totale est la somme des réactions du polygone (fig. 6) et elle est égale à  $Q_{1-19}$ .

En multipliant cette réaction par le rapport de  $\frac{3.000}{10.000}$  de la charge permanente à la charge admise, on obtient la réaction de la charge permanente.

A cause du grand nombre de réactions que l'on construit dans le polygone des réactions, les unes à la suite des autres, les erreurs peuvent se propager et il est utile de pouvoir procéder à des vérifications.

Les ordonnées du polygone peuvent se vérifier en chaque point; elles ne sont autre chose que les réactions verticales des charges au point O. L'ordonnée de l'extrémité du polygone est égale à la moitié de la charge totale de la travée.

La poussée horizontale de l'appui peut se vérifier très simplement pour la charge totale, dans le cas d'un arc parabolique. Supposons d'abord que la ligne de pression se confonde exactement avec la fibre moyenne, ce qui est possible, puis-

que les deux lignes ont la forme parabolique ; la poussée horizontale serait dans ce cas égale à

$$Q'_h = -\frac{pl^2}{8f} \quad (1)$$

$p$  étant la charge uniformément répartie par mètre courant,  $f$  la flèche de l'arc et  $l$  sa corde.

Toutes les parties de l'arc ne sont soumises qu'à des efforts de compression, et la corde de l'arc se réduira d'une longueur :

$$\Delta h = -\frac{Q'_h}{E} \sum \frac{\Delta s}{\omega} \quad (2)$$

Pour rétablir l'écartement primitif des appuis, il sera nécessaire d'exercer une poussée qui a pour expression (comparer avec formules (19) page 275) :

$$\Delta Q_h = +\frac{E \cdot \Delta h}{y_s \cdot y_x \sum \frac{\Delta s}{I}} = -\frac{Q'_h \cdot \sum \frac{\Delta s}{\omega}}{y_s y_x \sum \frac{\Delta s}{I}} \quad (3)$$

Le tableau donne pour le demi-arc :

$$\sum \frac{\Delta s}{\omega} = 335,4 \quad \text{et} \quad \sum \frac{\Delta s}{I} = 1374,0.$$

L'épure donne :

$$y_s = 3^m,5 \quad \text{et} \quad y_x = 4^m,13.$$

La charge  $p$  par mètre courant correspondant aux efforts de 10.000 k. pour lesquels le polygone des réactions a été tracé, est de  $\frac{10.000}{2,50} = 4.000$  k.

En introduisant toutes ces valeurs dans les formules (1) et (3), on trouve :

$$Q'_h = 250.000^k$$

$$\Delta Q_h = -4.200^k$$

$$Q_h = Q'_h + \Delta Q_h = 245.800^k, \text{ poussée horizontale vraie.}$$

L'extrémité du polygone des réactions (fig. 6) se trouve

## CHAPITRE VI — A

minée par ses coord  
sse représente 245.8

$$\frac{10.000 \times 19}{2}$$

sée horizontale cor  
éduit de la précéden  
ans ce cas :

$$(Q'_h = 250.000) >$$

$$\Delta Q_h = - 1.200 >$$

$$Q_h = Q'_h$$

fig. 3, la poussée h  
e les charges sous

icient de travail des  
e se calcule au moy  
rce extérieure et du r  
du centre de l'élén  
N se détermine de  
Q<sub>h</sub>.y se calcule.  
icient de travail de l

$$R_0 = \frac{N}{\omega} - \frac{Q_h \cdot y}{I}$$

icient de travail de la fibre extrême de l'intrados est

$$R_i = \frac{N}{\omega} + \frac{\Delta Q_h \cdot y \cdot r}{I}$$

al de ces coefficients est résumé dans le tableau sui-  
les cinq sections considérées :

Numéros des sections.	N	$\omega$	$\frac{I}{v}$	$\Delta Q_h$	$y$	$R_e$ par $m/m^2$	$R_i$ par $m/m^2$
		$m/m^2$		k		k	k
I	78.000	69.475	0,034	-1260	1,35	1,17	1,07
II	76.200	71.975	0,033	"	2,85	1,17	0,95
III	74.800	80.475	0,035	"	3,90	1,07	0,79
IV	74.000	80.975	0,032	"	4,65	1,10	0,74
V	73.800	79.475	0,028	"	5,00	1,15	0,71

Il résulte de la comparaison de  $R_e$  et  $R_i$  que l'influence des moments fléchissants est très faible pour la charge permanente.

Le coefficient de travail dû à l'effort tranchant est tout à fait négligeable et nous n'en avons pas tenu compte.

## VI. Surcharges

Nous avons déterminé tout d'abord les diagrammes des charges défavorables pour les fibres extrêmes supérieures et inférieures des cinq sections considérées ; cette détermination se fait par la méthode développée au § 12, page 266. Les parties indiquées par un trait double sont celles où la charge engendre un effort de compression.

Dans ces mêmes diagrammes nous avons tracé les lignes d'influence. Ces lignes sont obtenues en appliquant une charge de 10.000 k. successivement aux dix-neuf points d'application des charges, et en calculant, pour toutes ces positions, les coefficients de travail dans les cinq sections. Ces coefficients sont portés comme ordonnées au droit de la charge qui les produit ; 0<sup>m</sup>,01 correspond à un travail de 1 k. par millimètre carré.

Ces coefficients de travail sont calculés par les formules :

$$R = \frac{N}{\omega} + \frac{Mv}{I} \text{ pour l'extrados}$$

$$\text{et } R = \frac{N}{\omega} - \frac{Me}{I} \text{ pour l'intrados}$$

où l'on tient compte du signe des moments.

Le moment  $M$  est le produit de la force extérieure  $Q$  par sa distance  $q$  à la section. La force extérieure n'est autre chose que la réaction de gauche quand la charge agit à droite de la section, et la réaction de droite prise en signe contraire quand la charge se trouve à gauche. Les réactions sont données dans la fig. 6 pour toutes les positions de la charge ; le calcul de  $M$  ne présente donc aucune difficulté. L'effort de compression  $N$  s'obtient en projetant dans la fig. 6 la force extérieure sur la direction de la fibre moyenne, à l'emplacement de la section considérée.

La surcharge se compose d'un train de locomotives du type indiqué dans la fig. 2, page 5, train dont la moitié est portée par un arc.

Nous ne déterminerons que les efforts de compression, qui sont plus grands que les efforts de tension. De plus, les efforts de compression dus à la charge permanente se retranchent des efforts de tension et viennent diminuer encore considérablement ceux-ci.

Pour déterminer les efforts maximums dus à la surcharge dans une des cinq sections considérées, on charge toute la partie indiquée comme charge défavorable dans le diagramme, en ayant soin de placer les quatre essieux d'une locomotive dans la partie qui correspond au sommet de la ligne d'influence<sup>1</sup>, comme cela est indiqué aux diagrammes (fig. 7 et 8) pour la section III. On multiplie ensuite toutes les ordonnées de la ligne d'influence, mesurées au droit des charges, par le rapport de la charge à l'effort de 10.000 k. pour lequel la ligne d'influence est tracée ; la somme de ces produits représente le coefficient de travail maximum dû à la surcharge.

Les coefficients qui ont été ainsi obtenus sont donnés dans le tableau suivant :

1. La position exacte des essieux donnant l'effort maximum ne peut se déterminer que par tâtonnement ; mais on se contente de les placer approximativement, les efforts variant très peu avec un faible déplacement. On placera par exemple un des essieux du milieu au point correspondant au sommet de la ligne d'influence.

*Coefficients de travail maximums dus à la surcharge*

Numéros des sections.	Coefficient de travail à l'extrados.	Coefficient de travail à l'intrados.
	k	k
I	3,20	3,21
II	3,98	3,98
III	3,80	3,70
IV	3,73	2,86
V	2,95	2,20

**VII. Influence de la température.**

Nous avons vu au § 14, page 275, que la poussée horizontale due à la température se calcule par la formule

$$Q = \frac{E \cdot \tau \cdot t \cdot l}{F \cdot y_s \cdot y_x}$$

où

$$y_s = 3,5, \quad y_x = 4,13, \quad E = 16 \times 10^9, \quad \tau = 0,000012, \quad t = \pm 30, \\ l = 50, \quad F = 2 \times 1.374.$$

En introduisant ces valeurs dans la formule, on trouve :

$$Q = 7.300^k.$$

Le coefficient de travail à la compression dans une section est donné par les formules suivantes :

A l'extrados pour un abaissement de température :

$$R_e = \frac{Q \cdot y \cdot v}{I} - \frac{N}{\omega};$$

A l'intrados pour un accroissement de température :

$$R_i = \frac{Q \cdot y \cdot v}{I} + \frac{N}{\omega}$$

Dans ces formules l'effort normal  $N$  se détermine sur l'épure (fig. 10); c'est un effort de tension à l'extrados et un effort de compression à l'intrados. L'extrados est moins fatigué que l'intrados par les variations de température.

Le tableau suivant résume le calcul des coefficients pour les différentes sections :

Numéros des sections	N	$\omega$	$\frac{I}{r^2}$	$\frac{N}{\omega}$	$y$
	k	m/m <sup>2</sup>			
I	6.900	60.475	0,034	0,10	1,35
II	7.100	71.975	0,033	0,10	2,85
III	7.200	80.475	0,035	0,09	3,90
IV	7.250	80.975	0,032	0,09	4,65
V	7.300	79.475	0,028	0,09	5,00

### VIII. Coefficients de travail $\mu$

En additionnant les coefficients dus à la charge permanente, ceux dus à la surcharge et ceux de la température, les coefficients de travail maximums totaux sont groupés dans le tableau suivant, pour les intrados :

Numéros des sections	Charge permanente		Surcharge		Température	
	Extrados	Intrados	Extrados	Intrados	Extrados	Intrados
I	1,17	1,07	3,20	3,21	0,19	
II	1,17	0,95	3,98	3,98	0,53	
III	1,07	0,79	3,80	3,70	0,72	
IV	1,10	0,74	3,73	2,86	0,97	
V	1,15	0,71	2,95	2,20	1,21	

### IX. Déformations

(Planche 16)

Les seules déformations qui aient un intérêt sont les déformations verticales : elles peuvent

l pour une charge quelconque au moyen de polygonaux, dès que l'on connaît les efforts qui agissent sur différentes parties de l'arc.

Les variations de température donnent aussi des déplacements, souvent encore plus grands que ceux dus aux charges, qu'il est intéressant de déterminer.

Pour l'exemple d'arc à paroi pleine, nous construirons les déplacements dus à la charge permanente, celles que donne la charge d'entretien s'étendant sur la moitié de la travée et enfin celles dues à une variation de température de 30°.

Comme, portant aux § 4 et 5, on voit que dans les arcs à paroi pleine les rotations s'accomplissent autour d'un point D;

la force extérieure Q, tandis que dans les arcs à paroi creuse les centres de rotation D, D', D'' sont les centres de rotation. Les déplacements verticaux pourront, par conséquent, s'obtenir en construisant des polygones funiculaires ayant leurs sommets sur les lignes menées par les points D. Mais on pourra généralement dans les arcs à paroi pleine, négliger les déformations dues aux efforts normaux N et aux efforts tranchants T, et se contenter de mener les verticales des sommets du polygone des rotations par les centres des éléments.

Pour l'exemple que nous traitons, nous séparerons toutes les déformations : celles qui sont dues aux moments fléchissants que donnent les efforts normaux et enfin celles dues aux efforts tranchants. Nous verrons que ces dernières sont très faibles relativement à la première et que l'on peut les négliger complètement.

Dans le § 3 (fig. 182, 183, 184 et 185) un moment fléchissant sur un élément produit une rotation (page 232):

$$\Delta\theta = \frac{Q.q.\Delta s}{EI}$$

la rotation se fait autour du centre S de l'élément.

Le déplacement vertical  $\Delta v'$  d'un point invariablement lié à l'élément et situé à une distance horizontale  $x$  du centre S de l'élément, est égal à

$$\Delta v' = \Delta\theta.x = \frac{Q.q.\Delta s}{EI} x \quad (1)$$



Un effort normal  $N$  agissant sur le même élément donne un déplacement parallèle à l'axe de l'élément et égal à

$$\frac{N\Delta s}{\omega E}$$

Le déplacement vertical  $\Delta v''$  correspondant, en désignant par  $\Delta y$  la projection verticale de  $\Delta s$ , est

$$\Delta v'' = \frac{N \cdot \Delta y}{\omega E} \quad (5)$$

Un effort tranchant  $T$  produit un déplacement perpendiculaire à l'axe de l'élément et égal à

$$\frac{T \cdot \Delta s}{G\omega}$$

Le déplacement vertical  $\Delta v'''$  correspondant est

$$\Delta v''' = \frac{T \cdot \Delta x}{G\omega} \quad (6)$$

Le déplacement vertical total d'un point  $W$  invariablement lié à un élément qui se déforme est égal à

$$\Delta v = \Delta v' + \Delta v'' + \Delta v''' = \frac{Q \cdot q \cdot \Delta s}{EI} x + \frac{N \cdot \Delta y}{\omega E} + \frac{T \cdot \Delta x}{G\omega} \quad (7)$$

Il y a lieu de tenir compte des signes des efforts: on considérera comme positifs les moments qui tournent dans le sens des aiguilles d'une montre et les efforts normaux et tranchants dirigés de bas en haut, comme cela est indiqué dans la figure 201, par exemple. Les déplacements positifs seront alors ceux qui élèvent le point  $W$  considéré.

Lorsque les déformations sont dues aux efforts engendrés par les changements de température, il y a à ajouter un terme, celui de la dilatation

$$\Delta v_{IV} = \Delta y \cdot t \cdot \tau$$

$t$  étant le nombre de degrés et  $\tau$  la variation de l'unité de longueur pour un degré. Le déplacement total d'un point sous

l'influence de  $n$  éléments s'obtiendra en faisant la somme des déplacements dus aux  $n$  éléments.

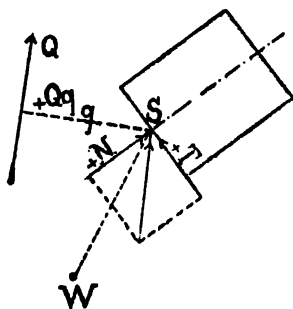


Fig. 201.

Avant de construire les déformations pour l'exemple qui nous occupe, il est nécessaire de calculer les éléments qui entrent dans les formules. Le tableau suivant contient les éléments fixes, communs à tous les cas de charge.

*Données générales*

Numéros des éléments	$\frac{EI}{\Delta s}$	$\Delta y$	$\frac{\Delta y}{\omega E} \times 10^9$	$\frac{\Delta x}{\omega G} \times 10^9$	Observations
1	144.000.000	0,95	0,845	5,52	$t = 30^\circ$ $\tau = 0,000012$ $E = 16 \times 10^9$ $G = 6,4 \times 10^9$ $\Delta x = 2,5$
2	133.000.000	0,85	0,765	5,02	
3	134.000.000	0,75	0,645	5,39	
4	124.000.000	0,65	0,563	5,42	
5	135.000.000	0,55	0,422	4,80	
6	124.000.000	0,45	0,350	4,85	
7	116.000.000	0,35	0,267	4,79	
8	105.000.000	0,25	0,193	4,82	
9	94.000.000	0,15	0,117	4,85	
10	84.000.000	0,05	0,039	4,92	

Nous ne reviendrons pas sur la méthode qui a servi à calculer les moments  $Qq$  et les efforts  $N$  et  $T$ ; elle a été indiquée dans ce qui précède. Les constructions correspondantes n'ont pas été conservées dans l'épure, pour ne pas la surcharger.

Les tableaux suivants donnent les éléments variables du

calcul des déformations. Pour la charge tranchants (presque nuls) ont été négligées des déformations dues aux moments et au moyen du polygone des forces de thode que nous avons déjà développée (planche 9); ces déformations sont faibles. Au milieu de l'arc, l'abaissement faisant la somme des  $\frac{N\Delta y}{\omega E}$  de la quatrième on obtient l'abaissement dû à la compression de l'arc; il est de 0,3 millimètres seulement; dans le cas de la charge permanente la compression est cependant grande relative mais ils ne produisent malgré cela qu'un effet négligeable.

*Données pour la charge permanente*

Numéros des éléments	Qq	N	
1	580	79.000	0
2	1.700	78.000	0
3	2.650	77.100	0
4	3.600	76.200	0
5	4.250	75.500	0
6	4.900	74.800	0
7	5.400	74.100	0
8	5.900	74.000	0
9	6.100	73.900	0
10	6.300	73.800	0
			0

Pour la demi-surcharge nous avons des efforts de compression N, qui sont faibles; mais des efforts tranchants. Ceux-ci donnent

des déformations de la quatrième colonne; elles n'atteignent même pas 10 de millimètre et disparaissent relativement à celles des moments. La disposition des essieux dans le cas de demi-sur-

charge est indiquée dans la fig. 3, pl. 16; l'abaissement maximum trouvé dans la figure 3 est de 26 millimètres du côté de l'arc chargé; tandis que du côté non chargé l'arc se relève de 18 millimètres. C'est le polygone des forces de la figure 4 qui a servi à tracer le polygone des déformations de la figure 5. Le premier rayon du polygone des forces a été tracé dans une direction quelconque; aussi la ligne  $OO_1$  de fermeture du polygone funiculaire (fig. 5), n'est-elle pas horizontale. Les déformations sont à mesurer verticalement, entre le polygone et la ligne  $OO_1$ .

*Données pour la demi-surcharge*

Numéros des éléments	$Qq$	T	$\frac{T\Delta x}{\omega G}$	Observations
1	23.000	14.500	0,000.080	Côté chargé
2	65.000	13.000	0,000.073	
3	89.000	4.000	0,000.021	
4	97.000	1.500	0,000.008	
5	105.000	4.500	0,000.022	
6	105.000	0	0	
7	93.000	— 3.500	—0,000.017	
8	89.000	— 6.500	—0,000.031	
9	65.000	—13.000	—0,000.063	
10	20.000	—18.500	—0,000.091	
10'	—20.000	—15.500	—0,000.077	Côté non chargé
9'	—49.000	—12.000	—0,000.058	
8'	—73.000	— 9.000	—0,000.044	
7'	—89.000	— 5.500	—0,000.026	
6'	—97.000	— 2.500	—0,000.012	
5'	—97.000	500	0,000.002	
4'	—89.000	3.500	0,000.019	
3'	—73.000	7.000	0,000.038	
2'	—48.000	10.000	0,000.056	
1'	—16.000	13.000	0,000.072	

Pour une variation de température de  $30^\circ$ , les moments  $Qq$  sont donnés dans le tableau suivant. L'influence des efforts de compression et des efforts tranchants est encore plus faible que dans le cas des charges; elle peut donc être négligée. La déformation due aux moments représentée par l'expression  $\Sigma \frac{Qq \Delta x}{EI} x$  a été construite comme pour les charges, au moyen

d'un polygone des forces (fig. 6) et d'un (fig. 7). Le déplacement à la clef est dû à la dilatation, représenté par se construit en calculant la dilatation la flèche (5<sup>m</sup>,00) ; elle est égale à

$$5,00 \times 30 \times 0,000012 =$$

Avec cette dilatation on construit un tout point de l'arc sa dilatation vertical ordonnées de cette parabole à celles informations dues aux moments, pour avoir ticaux totaux. Le déplacement total à

*Données pour une variation de  $t$*

Numéros des éléments.	
1	3
2	9
3	15
4	21
5	25
6	28
7	31
8	34
9	36
10	36

En général, on construit encore les pour la charge totale. Nous ne donnons dans l'épure ; elle se fait d'une manière charge permanente. Le déplacement surcharge totale, au milieu de l'arc, est

## § 20

## ARCS A TROIS ARTICULATIONS

(Planche 17)

Le calcul des arcs à trois articulations se fait sans qu'il y ait à recourir à la théorie de l'élasticité.

Les réactions des appuis se déterminent directement, par une simple décomposition de forces. A une charge  $P$  (fig. 202) correspondent les deux réactions  $Q_g$  et  $Q_d$ . L'une des deux réactions passe par les deux articulations  $O'$  et  $S$  et l'autre par l'articulation  $O$ . La ligne des intersections des réactions, ou le lieu des points d'intersection des deux réactions des appuis correspondant à une charge mobile  $P$ , se compose des deux droites  $SD$  et  $SD'$ , obtenues en prolongeant les lignes  $O'S$  et  $OS$ .

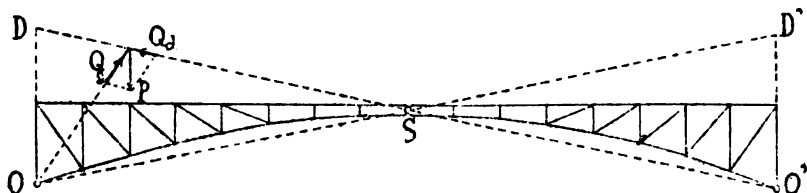


Fig. 202.

Dans la Pl. 17, nous donnons l'épure d'un arc de  $40^m,00$  de portée, et nous allons développer sur cet exemple la méthode de détermination des efforts.

Les données sont les suivantes :

Charge permanente par mètre courant. 2.000 k.

Surcharge par mètre courant . . . . . 900 k.

L'espacement des montants est de  $2^m,50$  ; on aura par suite, au droit de chaque montant, une charge permanente de 5.000 k. et une surcharge de 2.250 k.

La courbe de la fibre moyenne de la membrure inférieure de l'arc est une parabole, qui passe par l'articulation au som-

et; nous verrons plus loin quel  
urbe.

Commençons par la détermina  
arge.

### I. Surcharge

Les surcharges verticales sont p  
tres (fig. 2) dans un polygone  
uche de l'arc.

Les réactions correspondant  
ontants peuvent se déterminer  
rees comme cela est indiqué  
arge du montant 2; mais il est  
ns le polygone des forces, en n  
in des forces, une série de par  
çant entre ces parallèles un po  
2., dans lequel les lignes 1<sub>g</sub>, 2<sub>g</sub>,  
ctions OA<sub>1</sub>, OA<sub>2</sub>, etc., des réact  
Ce polygone 1<sub>g</sub>, 2<sub>g</sub>... donne à  
ns l'ordre voulu, les réactions  
arges 1 à 8. Les réactions de l'a  
nnent (fig. 2) sur la ligne N'C'  
verticales pointillées. En raba  
verticale C', on obtient les réa  
i de gauche correspondant aux  
gone O<sub>0</sub> O<sub>1</sub> des réactions de l'a  
si complété. La ligne droite  
la charge totale.

### II. Charges dé

*La charge défavorable*, corres  
t la charge qui produit l'effort  
le s'obtient en combinant tou  
ns la pièce des efforts de même

Supposons que la détermination des efforts se fasse au moyen de la force extérieure par la méthode de Ritter, indiquée page 85, pour les poutres à treillis, et considérons une section  $mn$  qui coupe (fig. 1, Pl. 1) la membrure supérieure, la membrure inférieure et la barre de treillis du panneau IV. Appliquons successivement la charge aux points 1, 2, 3..... 1'. — Aux charges 1, 2, 3, situées à gauche de la section, correspondent des forces extérieures égales aux réactions de droite, mais de signe contraire, comme la force  $Q'_2$  (fig. 203) tandis qu'aux charges 4, 5, 6, ..... 1', situées à droite, correspondent des forces extérieures égales aux réactions de gauche, comme la force  $Q_6$  (fig. 203). Toutes les forces extérieures qui tournent dans le même sens autour du nœud X, fig. 1 de la Pl. 17, donnent des efforts de même signe dans la membrure inférieure.

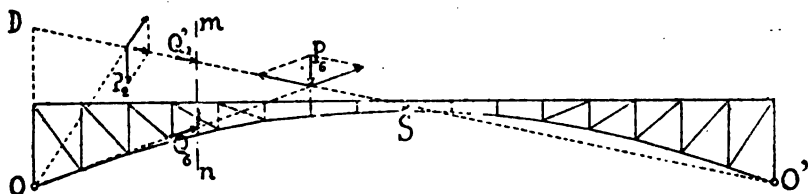


Fig. 203.

Toutes celles qui tournent dans le même sens autour du nœud Y donnent des efforts de même signe dans la membrure supérieure. Enfin les forces extérieures qui tournent dans le même sens autour du point Z donnent des efforts de même signe dans la barre de treillis. Les diagrammes de la figure 3 indiquent la charge défavorable, c'est-à-dire les parties du tablier que la surcharge devra occuper pour produire l'effort maximum dans chaque pièce.

Les doubles traits indiquent les parties qu'il faut charger pour obtenir la compression maxima, les simples traits indiquent au contraire les parties qu'il faut charger pour produire l'effort de tension maximum.

Les charges défavorables dans les montants s'obtiennent en faisant des sections obliques  $m'n'$  (fig. 1). Pour le montant



n° 3, par exemple, on considère la rotation.

Dans les parties de l'arc qui sont occupées par des fibres extrêmes si, à cet effet, on détermine dans les sections les points  $K_1$  et  $K_2$  du noyau central. Toute force extérieure passant au-dessus de la compression dans la fibre extrême supérieure et au-dessous du point de compression dans la fibre extrême inférieure

### III. Efforts maximums du

Les charges défavorables étant déterminées, les efforts maximums correspondants. L'épure pour les pièces du panneau. Les diagrammes (fig. 3) indiquent les efforts à considérer. Le polygone des forces (fig. 4) indique la grandeur et la direction des forces. Le diagramme des moments (fig. 5) indique la grandeur et la direction des moments. La force extérieure étant toujours la même, les efforts maximums se construisent en faisant passer la force extérieure par les points O et C.

Pour la membrure inférieure, les charges 5 à 1' et la force extérieure sont les mêmes. La charge  $mn$  est désignée par  $Q_{3-1'}$  dans le diagramme des forces. La distance de  $Q_{3-1'}$  au nœud X, mesurée le long de la fibre moyenne, est de 2 m, 2; la distance de la fibre moyenne inférieure au même point est de 1 m, 6 (fig. 2, est de 38.000 k.

L'effort maximum de compression dans la membrure inférieure pour la surcharge se déduit en égalant à

$$\frac{38.000 \times 2,2}{1,6} = 52$$

L'effort maximum de tension dans

par  $Q_{7-1'}$ , agissant autour du nœud Y; il est

$$\frac{30.000 \times 0,90}{1,10} = 24.500k.$$

maximum de tension dans la barre de treillis est  $Q_{1-6}$ , agissant autour du point Z; il est égal à

$$\frac{15.000 \times 2,00}{2,60} = 11.500k.$$

maximum de compression dans le montant 3 s'obtient de la force extérieure  $Q'_{1-6}$ , correspondant à la 2; il est égal à

$$\frac{15.500 \times 2,60}{6,70} = 6.000k.$$

On pourrait d'une manière analogue les efforts maximum et minimum contraire; nous nous dispensons de les calculer pour ne pas compliquer davantage la figure.

On peut dire que la méthode de Culmann, page 83, pourrait être remplacée par celle de Ritter pour la détermination des efforts tranchants.

Dans les parties où le treillis est remplacé par une paroi, les efforts se déterminent au moyen des moments fléchissants, de l'effort normal et de l'effort tranchant.

La force extérieure  $Q$  (fig. 204) se décompose en un effort  $N$  normal à la section et un effort tranchant  $T$ .

Désignons par  $n$  la distance de l'effort  $N$  au centre de gravité de la section, par  $\Omega$  la surface de la section, par  $I$  son moment d'inertie, par  $v_0$  et  $v_1$  les distances des fibres extrêmes supérieures et inférieures au centre de gravité.

Le coefficient de travail de la fibre supérieure sera

$$R_s = \frac{N}{\Omega} + \frac{N \cdot n \cdot v_0}{I}.$$

Le coefficient de travail de la fibre extrême inférieure sera

$$R_i = \frac{N}{n} - \frac{N \cdot n \cdot e_i}{I}$$

L'effort tranchant  $T$  sert à calculer mais cet effort est toujours très faible, négligeable, de faire le calcul des âmes.

#### IV. Variation des réactions avec la

Les réactions varient avec la position de la charge. Elles sont maximums lorsque la charge est au point d'appui. Considérons la réaction de gauche, par exemple, lorsque la charge passe du point  $O$  au point  $O'$ ; si nous traçons la ligne de passage des charges des ordonnées des réactions (fig. 5) la ligne que l'on obtient est une hyperbole de l'appui  $O$  au point  $S$ , et la ligne qui va du point  $S$  au point  $O'$  c'est une droite.

L'hyperbole a un axe vertical passant par le point  $O$  et s'obtient en menant du point  $O$  une ligne  $SD$ . Sur l'appui  $O$ , la réaction est représentative des réactions (fig. 5). Pour un point de l'arc la réaction correspondante est représentative des réactions de gauche; on ne l'a pas tracé.

#### V. Charges roulant

Nous avons vu de quelle manière une charge doit être placée pour engendrer le maximum d'effort dans une pièce; il est intéressant de déterminer la position que doit occuper une charge roulante pour produire le maximum d'effort. A cet effet, nous considérerons une poutre à section  $mn$  et la section  $m'n'$ , et nous tracerons ces coupées la ligne d'influence (fig. 4). On s'obtient en portant au droit des charges les efforts proportionnelles aux efforts qu'elles engendrent. Les efforts de compression sont portés au-dessus de la ligne et les efforts de tension en dessous. On voit dans

d'influence se composent toutes de lignes droites, et qu'elles ont un sommet au milieu de l'arc. En plaçant les charges les plus lourdes au milieu de l'arc, on obtiendra donc dans toutes les pièces, soit un effort maximum, soit un effort minimum. De plus, chacune des lignes a un autre sommet situé sur l'un des montants voisins de la section, et à ce sommet correspond également un maximum ou un minimum.

Pour obtenir l'effort maximum à la compression ou à la tension, on chargera toutes les parties indiquées par le diagramme de la fig. 3 et l'on aura soin de placer les charges les plus lourdes aux points correspondant aux sommets des lignes d'influence de la fig. 4.

Les efforts dus aux charges défavorables se détermineront exactement comme ceux qui sont dus à la surcharge uniformément répartie, au moyen des forces extérieures.

#### VI. Charge permanente

Nous avons dit que la fibre moyenne de la membrure inférieure avait la forme parabolique et que l'articulation de la clef se trouve sur cette fibre moyenne. Grâce à cette disposition, la ligne de pression correspondant à la charge permanente, supposée uniformément répartie sur la longueur de l'arc, se confond avec la fibre moyenne; en d'autres termes, la force extérieure passe en tout point par le centre de gravité de la section de la membrure inférieure. Les forces extérieures se déduisent facilement du polygone de la surcharge (fig. 2) et il n'est pas nécessaire de tracer un nouveau polygone pour la charge permanente. Il suffit de multiplier les efforts dus à la surcharge par le rapport  $\frac{2000}{900}$  de la charge permanente à la surcharge. S'agit-il par exemple de déterminer l'effort dans la membrure inférieure du panneau IV, on mesure à l'échelle, (fig. 2), la force extérieure  $O_1N$  égale à 45.000 k. et on la multiplie par  $\frac{2000}{900}$ , ce qui donne 100.000 k. Dans le cas où les dispositions ne seraient pas celles du cas considéré, la force

extérieure ne passerait pas par la section des membrures inférieures. Les différentes pièces s'obtiendraient par la méthode de Culmann, de Ritter ou de Cremona.

Remarquons qu'il est préférable d'avoir fait, les calculs par la méthode de Culmann; tandis que la charge peut se trouver modifiée. C'est pour cette raison aussi qu'on a tracé pour la surcharge.

### VII. Influence de

Nous avons déjà dit que les déplacements ne donnent lieu à aucun effort supplémentaire. Les deux moitiés de la poutre tournent autour de leurs appuis  $O$  et  $O'$ , sans se déformer ou s'abaisse avec une élévation de la température. Le déplacement pendant la rotation, se détermine par la rotation  $205$ )  $A'S$  l'allongement et  $AS$  le raccourcissement du corde de l'arc, pour les limites de

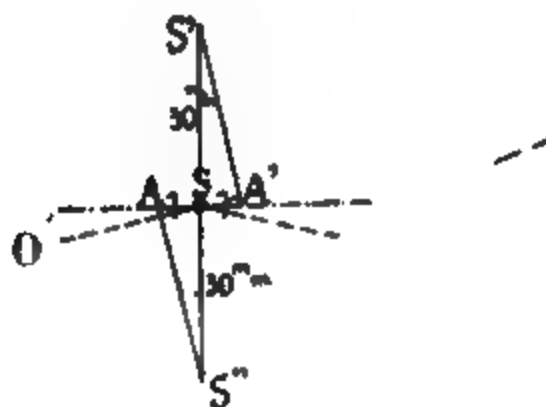


Fig. 203.

menant les lignes  $A'S'$  et  $AS''$  par la méthode de Culmann, on obtient sur la verticale le point  $S$ .

Dans l'arc de  $40^m$  de la planche

, pour un changement de température de  $\pm 30^\circ$  (se 17) :

$$\frac{40}{2} \times 0,00036 = 0,0072.$$

ment vertical du point S est de  $\pm 30^{\text{mm}}$  ; il a pour

$$\Delta f = \frac{t\tau l}{2 \lg \alpha} + f\tau t,$$

riation de température ;

on linéaire pour un degré ;

le l'arc ;

e l'arc ;

la ligne OS avec l'horizontale.

rule précédente le premier terme est dû à la di-  
mentale, le deuxième à la dilatation verticale.

### VIII. Déformation de l'arc

ion d'un arc à trois articulations se déduit de  
ne de ses moitiés.

et effet déterminer la variation de longueur  $\Delta h'$   
6) des lignes OS et O'S, puis le déplacement du  
n les déformations des demi-arcs relativement à

es formules (5) et (6), page 233, pour un élé-  
leine et (8) et (9), page 240, pour un élément à

ons la ligne OS comme axe des  $x$  (fig. 207), le  
u point S par rapport au point O, suivant la  
aura pour expression :

$$\Delta h' = - \sum_0^A Qq \cdot y \cdot \frac{s}{E\omega a^2} - \sum_A^S Qq \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{E l}$$

erme du second membre s'appliquant à toutes  
nbrures supérieures, membrures inférieures et  
is, le second terme, aux éléments de la partie



## § 21

## INFLUENCE DU VENT SUR LES ARCS

Les calculs de la résistance des arcs à l'action du vent sont très compliqués si l'on veut employer une méthode rigoureusement exacte ; mais il suffira, en général, de faire un calcul approximatif.

L'intensité des efforts du vent et la répartition de ces efforts sur une construction ne sont pas exactement connus, comme le sont les charges verticales ; ils se déduisent d'hypothèses douteuses et, par suite, les résultats d'une méthode rigoureuse ne seraient toujours qu'approximatifs.

Nous commencerons par la méthode générale et nous verrons ensuite quelles sont les simplifications que l'on peut faire suivant les cas.

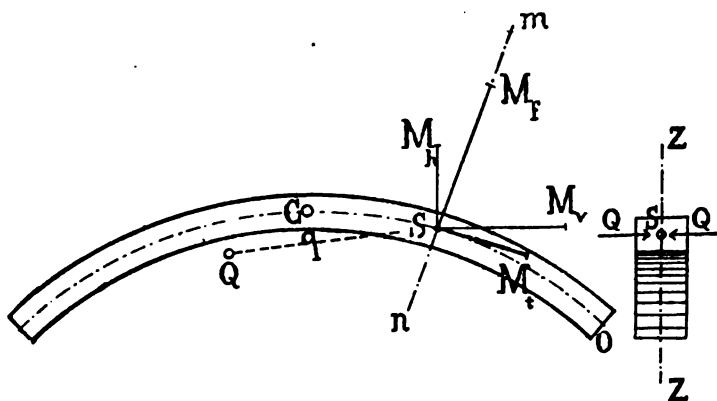


Fig. 209.

Considérons d'abord (fig. 209) un arc ou l'ensemble de deux arcs réunis par deux contreventements, situés l'un à l'extrados, l'autre à l'intrados, et faisons une section  $mn$  normale à la fibre moyenne des arcs.

Désignons par  $Q$  la force extérieure résultante de tous les efforts du vent agissant sur la construction à gauche de la sec-



## CHAPITRE VI — ARCS M

liquant au centre  $S$  de la  
gne contraire, nous auro  
 $lq$  et par un effort tranch  
sons ensuite le couple  $Q$   
plan de la section, qui de  
dans un plan perpendic  
*moment fléchissant.*

roduira dans la section :  
ment de torsion ;  
ment fléchissant ;  
rt tranchant.

ignerons par le nom de  $p$   
gale distance des deux a  
agisse perpendiculairement  
stante sur toutes les pa  
sidérerons que le cas d'e  
chargés par le vent.

$Q$  et le plan du couple  $Q$   
en ; mais la direction du  
n à l'autre, et il sera plus  
autres couples équivalen  
l, l'autre  $M_h$  situé dans u  
représentatifs de ces cou  
(fig. 210) et ces axes so  
e représentatif est à éle  
rapport au plan du coup  
s le sens inverse des aigu  
x signes des moments, ne  
ceux dont les axes sont  
née par le centre  $S$  de la  
fs (voir fig. 210). Il sera  
coupés à la clef, à la con  
horizontal  $M$ , à la clef, seul  
utre.

s (fig. 210) une section  
fibre moyenne en cette s  
égligeons d'abord le mom  
1 :

cal  $M'_v$ ;  
 zontal  $M'_h$ ;  
 issant  $M'_r$ ;  
 orsion  $M'_t$ .

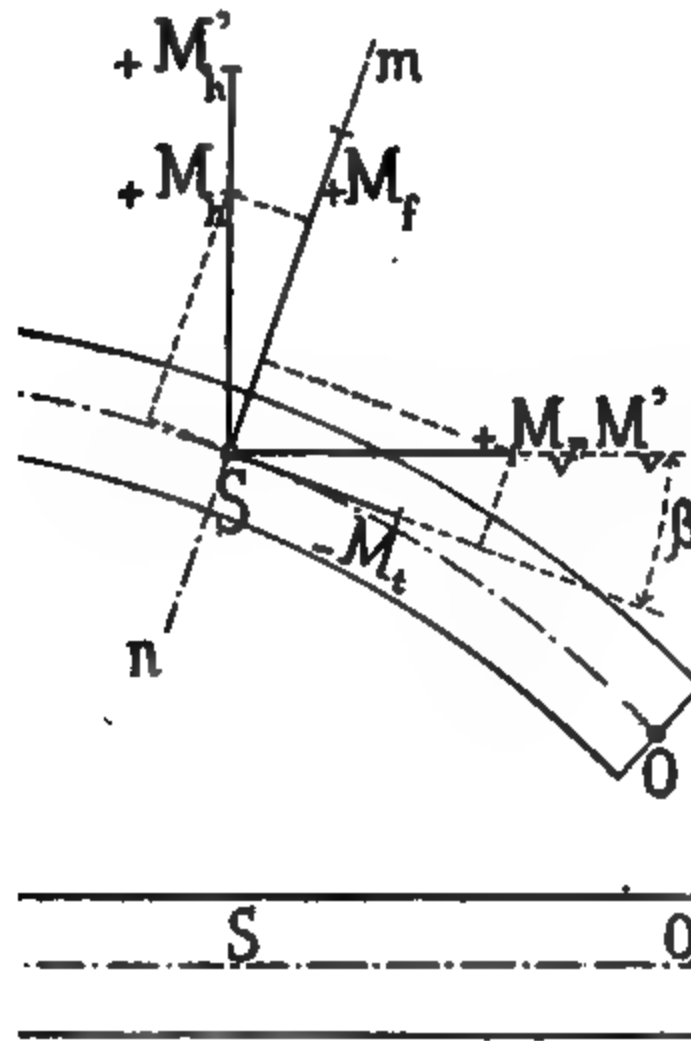


Fig. 210.

compte du moment à la clef  $M_1$ , les moments sont :

$$M_v = M'_v \quad (1)$$

$$M_h = M'_h - M_1 \quad (2)$$

$$M_r = M'_r - M_1 \cos \beta \quad (3)$$

$$M_t = M'_t - M_1 \sin \beta \quad (4)$$

Les moments  $M'_h$ ,  $M'_r$ ,  $M'_t$  sont faciles à déterminer. On les construit au moyen de polygones funiculaires. Les autres se déduisent des premiers par projection. On détermine les moments  $M'_v$  et  $M'_h$

## CHAPITRE VI — ARCS MÉTAI

une section, il faut faire entrer tout soit directement, soit indirectement, sur les parties de l'arc situées en tête.

a :

$$\begin{aligned} M_t &= M_h \cos \beta + M \\ W_t &= M_h \sin \beta - M \end{aligned}$$

moment  $M_t$  à la clef est inconnu ;  
 miner si les arcs étaient libres aux  
 ées exercées par les charges produis  
 les arcs surbaissés et situés dans de  
 ent  $M_t$  pourra se déterminer comm  
 à section constante. Dans le cas c  
 constant  $p$  par mètre courant de tal

$$\frac{pt^2}{24}$$

à-dire le tiers du moment total obten  
 istrement.

is le cas contraire, où les arcs ont  
 uvent plus écartés aux naissances qu  
 du moment  $M_t$  à la clef ne peut se  
 orie de l'élasticité. On exprimera à c  
 ations, de la naissance 0 de l'arc  
 vertical  $y$  doit être nulle<sup>1</sup>.

rimons la rotation d'un élément :  
 moment fléchissant  $M_f$ , agissant da  
 e moyenne, produit sur la longuen  
 il agit une rotation

$$\theta = \frac{M_f \cdot \Delta s}{E \cdot I}$$

t le moment d'inertie relativement à

<sup>1</sup> effet, la section aux naissances étant fixe,  
 t tourner autour de l'axe des  $y$  à cause de la  
 itions doit être nulle.

## § 21 — INFLUENCE DU VENT SUR LES ARCS

La rotation autour de l'axe des  $y$  sera

$$\delta'_y = \frac{M_f \Delta s \cos \beta}{E \cdot I}$$

La théorie de la torsion donne pour la rotation d'une section extrême d'un élément relativement à l'autre :

$$\delta'' = \frac{M_t \Delta s}{G \cdot I_p},$$

$G$  étant le coefficient d'élasticité transversale et  $I_p$  le moment d'inertie polaire de la section.

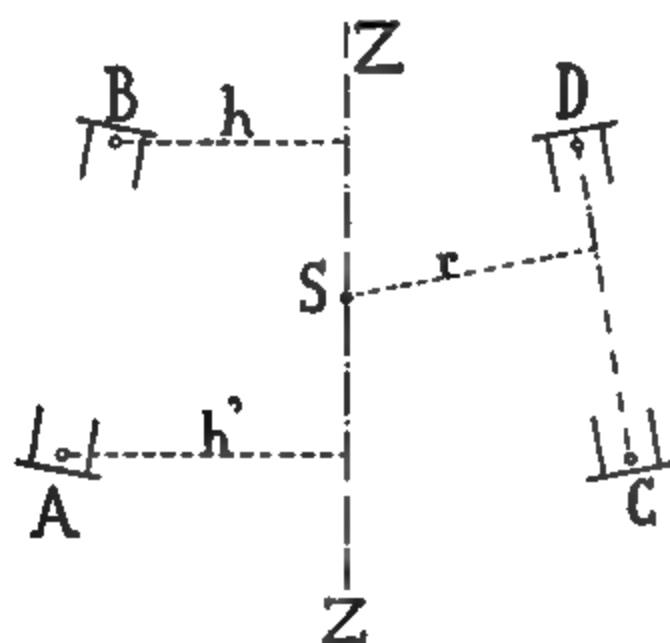


Fig. 211.

La rotation correspondante autour de l'axe des  $y$  sera :

$$\delta''_y = \frac{M_t \Delta s \sin \beta}{G \cdot I_p}.$$

Les formules (7) et (8) ne s'appliquent qu'aux arcs à poutre pleine ; dans le cas d'arcs à treillis, ces formules sont à modifier. Nous remarquerons, du reste, que ce n'est que pour les arcs à grande portée, qui seront toujours à treillis, que nous aurons à appliquer ces calculs relatifs au vent, et nous ne développerons les formules que pour ce cas.

Si, pour la flexion, l'on néglige la rotation due à la déformation des barres de treillis, qui est relativement faible, la formule (7) est encore applicable : on remplacera  $\Delta s$  par  $\alpha$  la



La rotation autour de l'axe des  $y$  sera

$$\theta_y = \frac{M_t \cdot a \cdot \sin \beta}{E \Sigma (r^2 \cdot \omega \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha)} \quad (12)$$

La somme de toutes les rotations autour de l'axe des  $y$ , du point O au point C, est, comme nous l'avons vu, égale à 0 et nous aurons d'après les formules (7) et (12) :

$$\sum_0^c \frac{M_f \cdot a \cdot \cos \beta}{EI} + \sum_0^c \frac{M_t \cdot a \cdot \sin \beta}{E \cdot \Sigma (r^2 \cdot \omega \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha)} = 0$$

En remplaçant  $M_f$  et  $M_t$  par leurs valeurs des formules (3) et (4) et  $a \cos \beta$  par  $\Delta x$ , projection de  $a$  sur l'axe des  $x$ , puis en tirant la valeur de  $M_i$  il vient :

$$M_i = \frac{\sum_0^c \left[ \left( \frac{M'_f}{I} + \frac{M'_t \cdot \operatorname{tg} \beta}{\Sigma (r^2 \cdot \omega \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha)} \right) \Delta x \right]}{\sum_0^c \left[ \left( \frac{\cos \beta}{I} + \frac{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin \beta}{\Sigma (r^2 \cdot \omega \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha)} \right) \Delta x \right]} \quad (13)$$

Quant aux signes à donner aux différents moments,  $M'_f$  est toujours positif, tandis que  $M'_t$  n'est positif que dans le cas où  $M'_h \sin \beta$  est plus grand que  $M'_v \cos \beta$  (voir formule 6).

La formule donne  $M_i$  en valeur absolue.

Dans les arcs qui n'ont pas une grande flèche, et pour les portées habituelles, on pourra négliger l'inclinaison  $\beta$  et faire  $\beta = 0$ , il sera permis aussi de supposer un moment d'inertie constant ; la formule (13) devient alors, en désignant par  $l$  la corde de l'arc :

$$M_i = \frac{\sum_0^c M'_h \cdot \Delta x}{\frac{l}{2}} \quad (14)$$

Enfin dans le cas où l'effort du vent est sensiblement constant par mètre courant et égal à  $p$ , on aura

$$M_i = \frac{pl^2}{24} \quad (15)$$

Les expressions des formules (13), (14) et (15) peuvent se cal-

## CHAPITRE VI — A

se construire graphiquement  
aucune difficulté.

issant le moment  $M_1$ ,  
ents dans les différents  
a été faite dans la figure  
forts du vent ont été  
sur un plan horizontal  
iculaire au plan moyen  
le polygone des moments  
s verticaux  $M_v$ .

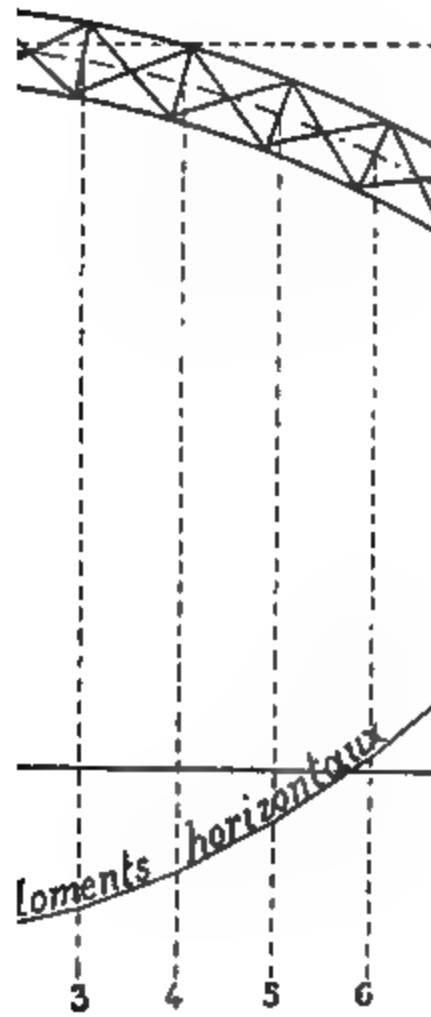


Fig.

### polygone des moments v

remarquons que pour le  
culaire donne tous les mom  
pour les moments verticaux  
il en général de nouveaux e

moments réels, tandis que les moments horizontaux mesurés à partir de la ligne horizontale AB, obtenue AD —  $M_1$ .

En composant les moments  $M_h$  et  $M_v$  et en les projetant dans les directions correspondantes, on obtient les moments réels. Il nous reste à voir comment on déduit de ces moments les efforts dans les arcs.

Le moment  $M_r$  fait travailler les membrures ; l'effort de travail s'obtient par la formule

$$R_x = \frac{M_r}{\frac{I}{h}}.$$

Dans cette expression, I a la valeur de la formule (10).

Le moment de torsion, d'après l'hypothèse que nous avons faite, n'engendre des efforts que dans les treillis et les ventements ; il donne dans chacune des quatre faces du tétraèdre, à partir des sommets A, B, C, D, un effort  $p$  ; cet effort peut être déterminé au moyen des formules (10) et (11). En égalant les déformations  $\delta$ , on trouve :

$$p_v = \frac{r \cdot \omega_v \cdot \sin^2 \alpha_v \cdot \cos \alpha_v \cdot M_t}{\sum (r^2 \cdot \omega_v \cdot \sin^2 \alpha_v \cdot \cos \alpha_v)}$$

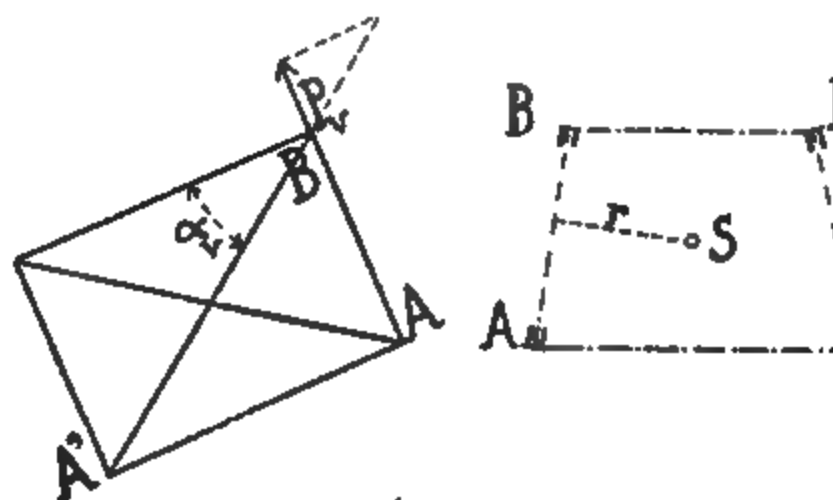


Fig. 213.

Dans cette formule  $\omega_v$  est la section d'une barre AB,  $r$  la distance du plan AB au centre S,  $\alpha_v$  l'angle entre la barre AB avec la fibre moyenne.





## CHAPITRE SEPTIÈME

### POUTRES CONTINUES

On qualifie de *poutres continues* celles qui reposent sur plus de deux appuis. Pour déterminer la manière dont les charges se répartissent sur les différents appuis, on est obligé d'étudier les déformations de la poutre considérée et d'introduire dans les calculs la condition de la fixité des appuis suivant la verticale.

On suppose, en général, pour simplifier les recherches, que la section de la poutre est constante sur toute sa longueur et l'on se sert de la méthode de *Mohr*. Cette hypothèse se justifie par des calculs comparatifs qui montrent qu'on altère peu les résultats d'un calcul exact en introduisant dans les constructions une section constante.

Il peut être intéressant, cependant, lorsque la section varie d'une manière anormale, soit dans le cas de très grandes portées, soit lorsqu'on fait varier la hauteur des poutres, de contrôler les résultats en tenant compte, pour chaque élément de poutre, de sa section réelle.

La méthode qui s'applique au cas général, celui d'une section variable, ne peut conduire à des déterminations directes, car les réactions sur les appuis et par suite aussi les moments fléchissants dépendent des sections. Cette méthode ne peut donc servir que comme vérification, et les dimensions de la poutre se calculeront d'abord par la méthode de *Mohr*.

Nous commencerons cependant par le cas d'une section variable, et nous passerons ensuite au cas particulier d'une section constante.

## CHAPITRE VII .

### POUTRE A :

La méthode ' comprend

1) Détermination de l'a  
appuis sur piles, sous  
t que la poutre ait une  
ses appuis extrêmes.

2) Détermination du mo  
appuis par des réaction

3) Au moyen des défor  
ies réactions qui ramèn

charges dans la position qu ils doivent occuper.

Dans tous les calculs des déplacements, nous négligerons,  
me on le fait en général, l'influence de la déformation des  
llis qui est relativement faible.

Nous développerons la méthode sur une poutre à trois  
vées de  $72^m,70$ , de  $104^m,55$  et de  $72^m,70$ , donnant entre les  
uis extrêmes une ouverture totale de  $249^m,95$  (voir Pl. 18).  
Les charges sont appliquées aux montants 1 à 25.

En polygone des forces (fig. 2) avec distance polaire de  
m. et pôle O, a servi à tracer le polygone funiculaire AEK,  
respondant à une portée de  $249^m,95$  et à une charge de  
00 k. par mètre courant de poutre.

Le polygone funiculaire donne à la fois :

\* En AEK, la surface des moments fléchissants pour la  
rge totale sur  $249^m,95$  ;

° En ABC, la surface des moments fléchissants, pour le cas  
ne charge, sur les  $72^m,70$  de la première travée ;

° En DEF la surface des moments fléchissants pour la  
rge sur les  $104^m,55$  de la travée centrale.

Le même polygone des forces (fig. 2) avec le pôle O', a  
vi à tracer la ligne DGF, donnant la surface des moments  
respondant à une réaction de 100.000 k. exercée par l'ap-  
de la pile 2.

Cette méthode a été publiée par M. Bertrand de Fontviolant, ingénieur

Les trois dernières surfaces des moments fléchissants ont été divisées en triangles indiqués en pointillé. La division en triangles est telle que sur la longueur de l'un d'eux le moment d'inertie de la poutre est constant. Les moments d'inertie  $I$  sont inscrits dans un tableau sur l'épure ; ils varient de 1,24 à 2,75.

Les éléments triangulaires des surfaces des moments ont été concentrés en leurs centres de gravité et considérés comme forces. Ces forces ont été portées dans les fig. 3, 4 et 5 sur des verticales, et, au moyen de distances polaires proportionnelles à  $EI$  (produit du coefficient d'élasticité par le moment d'inertie), on a construit les polygones des forces à distances polaires variables.

Le polygone des forces (fig. 3) correspond à la surface des moments ABC de la charge sur la première travée ; il a servi à tracer le polygone funiculaire (5).

Les ordonnées de ce polygone funiculaire sont proportionnelles aux déformations verticales de la poutre ; elles sont égales :

Sous la pile 1, à. . . . . 36 millimètres;

Sous la pile 2, à. . . . . 29 millimètres.

Le polygone des forces (fig. 5) correspond à la surface des moments DEF de la charge sur la travée centrale, il a servi à tracer le polygone funiculaire (4). A cause de la symétrie des charges, ce polygone n'a été tracé que pour une moitié de la poutre ; il donne les déformations de la poutre. Au droit des piles, les ordonnées sont égales à 101<sup>mm</sup>.

Le polygone des forces (fig. 4) correspond à la surface des moments DGF de la réaction de 100.000 k. sous la pile 2. Ce polygone des forces a servi à tracer le polygone funiculaire (6), dont les ordonnées sont proportionnelles aux déformations verticales de la poutre ; elles sont égales à :

Sous la pile 1. . . . . 46<sup>mm</sup>,5 ;

Sous la pile 2. . . . . 56<sup>mm</sup>.

Les échelles des forces, celles des surfaces des moments et celles des  $EI$  peuvent être quelconques ; mais elles doivent être les mêmes pour tous les tracés des polygones ; il ne s'agit en effet que de déterminer des rapports entre les déformations et non les déformations elles-mêmes.

## CHAPITRE VII — POUTRES CONTINUES

ous cependant que ces mêmes polygones, en toutes échelles, peuvent servir au calcul des défor-

*tion des réactions pour une charge donnée.* — poutre porte une charge uniformément répartie une longueur, ou une charge concentrée en un de es déformations verticales sont proportionnelles à . De plus, la déformation verticale, due à plusieurs ou forces agissant simultanément, est en de la poutre égale à la somme des déformations par les charges ou forces agissant séparé-

es appuis sont situés sur une même horizontale, ns se déterminent en égalant les abaissements que produisent sur les appuis aux relèvements donnés ous.

par :  
s abaissements de la poutre au droit des appuis 1 et 2 sous l'action des charges.  
s relèvements des appuis 1 et 2 produits par une réaction de 100.000 k. de l'appui 1.  
s relèvements des appuis 1 et 2 produits par une réaction de 100.000 k. de l'appui 2.  
réactions cherchées aux appuis 1 et 2.  
ns :

$$a_1 = \frac{b'_1 \times R_1}{100.000} + \frac{b''_1 \times R_2}{100.000} \quad (1)$$

$$a_2 = \frac{b'_2 \times R_1}{100.000} + \frac{b''_2 \times R_2}{100.000} \quad (2)$$

formules,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b'_1$ ,  $b'_2$ ,  $b''_1$ ,  $b''_2$  sont déterminés ;  $R_1$  et  $R_2$  sont inconnus.

as que nous considérons, à cause de la symétrie :

$$\begin{aligned} b'_1 &= b'_2 = 56 \\ b''_1 &= b''_2 = 46,5. \end{aligned}$$

les (1) et (2) deviennent :

$$a_1 = 0,000560 R_1 + 0,000465 R_2, \quad (3)$$

$$a_2 = 0,000465 R_1 + 0,000560 R_2. \quad (4)$$

## § 1 — POUTRE A SECTION VARIABLE

Les quatre cas de surcharge que nous considérons sont les suivants :

- 1°. 1<sup>re</sup> travée seule chargée ;
- 2°. 2<sup>e</sup> travée chargée ;
- 3°. 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> travées chargées ;
- 4°. Les 3 travées chargées.

On a pour ces différents cas :

Premier cas	$a_1 = 36$	$a_2 = 29$
Deuxième cas	$a_1 = 101$	$a_2 = 101$
Troisième cas	$a_1 = 36 + 101 = 137$	$a_2 = 29 + 101 = 130$
Quatrième cas	$a_1 = 36 + 101 + 29 = 166$	$a_2 = 29 + 101 + 36$

En introduisant ces valeurs dans les formules (3) et (4) on trouve pour  $R_1$  et  $R_2$  les valeurs données dans le tableau suivant.

Les réactions  $R_0$  et  $R_3$  sur les culées se déduisent des réactions sur piles ; elles font équilibre à toutes les autres forces. Pour la charge sur la 1<sup>re</sup> travée, par exemple, (fig. 205) :

$$R_0 = \frac{P_1 \left( \frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 \right) - R_1 (l_2 + l_3) - R_2 l_3}{l_1 + l_2 + l_3}$$

$$R_3 = P_1 - R_0 - R_1 - R_2$$

$P_1$  étant la charge sur la première travée.

Les réactions  $R_0$  et  $R_3$  sont calculées d'une manière analogue pour les 4 cas de charges considérés ; elles sont inscrites avec les réactions  $R_1$  et  $R_2$  dans le tableau suivant :

Cas de charge	$R_0$	$R_1$	$R_2$	
Premier cas ..... Première travée seule chargée.	52.300	68.550	— 5.150	
Deuxième cas..... Deuxième travée seule chargée.	— 14.500	98.540	98.540	— 1
Troisième cas..... Première et deuxième travées chargées	37.400	167.090	93.390	— 1
Quatrième cas..... 3 travées chargées.	38.020	161.940	161.940	3

POI

ris  
lété  
ssa  
nar,  
st d  
er q  
se t  
oul  
ntc

—

2...

g. 2

alcu  
ctio  
one  
gon  
nei  
ical  
idé  
sor  
4  
1.00  
ou  
ou  
s r  
ou  
on  
our

ve

000  
00.

ect

vée centrale, dans le cas où cette travée est seule chargée à 1.600 k. par mètre courant de poutre ? On procédera comme suit :

La flèche, prise par la poutre (polygone (4) ), lorsqu'on supprime les réactions, est de :

$$128,5\text{mm} \times \frac{80}{5}$$

Les réactions de 98.540 k. sous les deux piles donnent chacune une flèche négative (polygone (6) ) :

$$64\text{mm} \times \frac{98.540}{100.000} \times \frac{80}{5} = 63 \times \frac{80}{5}.$$

La flèche cherchée sera :

$$f = (128,5 - 2 \times 63) \times \frac{80}{5} = 40\text{mm}.$$

Les flèches sont proportionnelles aux charges, il est donc facile de passer d'une charge à une autre sans refaire un nouveau tracé de polygones.

*Comparaison entre la méthode exacte et la méthode approchée.* — Il est intéressant de connaître l'erreur que l'on commet en supposant que la section de la poutre est constante.

Prenons le cas où les deux premières travées sont chargées : l'épure donne une réaction

$$R_0 = 37.400\text{k}.$$

Le moment fléchissant sur la pile 1 est égal à

$$\mu_1 = \frac{1.600 \times \overline{72,70}^2}{2} - 37.400 \times 72,70 = 1.509.252$$

Les formules de Clapeyron, pour une section constante, donnent, voir Ch. XII, § 2 :

$$\mu_1 = \frac{2p_1(l_1^4 + l_1^3l_2) + p_2(l_2^4 + 2l_1l_2^3) - p_3(l_1^3l_2)}{4(4l_1^3 + 8l_1l_2 + 3l_2^3)} = 1.470.500.$$

Dans le cas que nous considérons, la différence entre les deux moments n'est pas très importante ; cela vient de ce que



le renforcement de la poutre par des n'existe que sur une faible longueur

*Abaissement des appuis.* — L'abaissement des appuis modifie, comme des efforts, et par suite aussi les réact

On peut dire aussi, pour mieux sépiement de celle des charges, que l'abaissement de nouvelles réactions positives et n'ajouter à celles des charges.

Reprenons notre poutre à trois 100.000 k. sous l'appui 2 donne le suivants :

$$\begin{aligned}\text{Sur la pile 1} & 40,5 \times \frac{80}{5} \\ \text{Sur la pile 2} & 56 \times \frac{80}{5} = 896 \text{ mm}\end{aligned}$$

Désignons par  $R_1$  et  $R_2$  les réactions qui produisent un abaissement de 1<sup>mm</sup> sur la pile 1 et un abaissement nul sur la pile 2. Ces réactions peuvent se déterminer par les formules :

$$-1 = \frac{896 \times R_1}{100.000} + \frac{744 \times R_2}{100.000} \quad (7)$$

$$0 = \frac{744 \times R_1}{100.000} + \frac{896 \times R_2}{100.000} \quad (8)$$

d'où l'on tire :

$$R_1 = -359,4 \text{ k.}$$

$$R_2 = +298,5 \text{ k.}$$

Les réactions sont proportionnelles aux abaissements.

Prenons un exemple :

L'appui de la pile 1 s'abaisse de 50<sup>mm</sup> ; la réaction sur cet appui sera  $-359,4 \times 50 = -17.970 \text{ k.}$  La réaction sur l'appui de la pile 2 sera  $298,5 \times 50 = 14.925 \text{ k.}$

Les réactions sur les culées font équilibre à celles des piles. Sur la culée 0, la réaction  $R_0$  est égale à :

$$R_0 = - \frac{-17.970 \times (72,70 + 104,55) + 14.925 \times 72,70}{2 \times 72,70 + 104,55} = 8.400.$$

$R_3$  sur la culée 3 est donnée par la formule

$$R_3 = 17.970 + 11.925 + 8.100 = 0,$$

$$R_3 = - 5.355.$$

fléchissant engendré par l'abaissement de 50<sup>m</sup>/<sup>m</sup> égal à  $8.400 \times 72,70 = 610.680$ , au-dessus de

le s'abaisse aussi, on procédera d'une manière déterminée les réactions et on les ajoutera aux

des appuis des culées peut se remplacer par correspondant des appuis sur piles, il n'est donc de traiter spécialement ce cas.

## § 2

### VOÛTE A SECTION CONSTANTE

#### statique, points d'inflexion, lignes d'inflexion

l'abord que la poutre soit coupée sur tous ses appuis, on trace dans cette hypothèse, pour chaque travée, une funiculaire dont les ordonnées sont proportionnelles aux moments fléchissants correspondant à des char-

gées des appuis ne modifie pas le contour du polygone, mais elle a simplement pour effet de déplacer l'origine de laquelle les ordonnées sont à mesurer. En outre, elle engendre des moments négatifs ; la ligne des moments est une droite, qui est la nouvelle fermeture du polygone.

216 les polygones funiculaires des moments sont présentés par les lignes ASB, BS'C, CS''D pour les trois travées. La ligne AB<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D est la ligne des mo-

La combinaison des moments pos  
fs donne les moments réels qui s  
milieu des travées et négatifs da  
es surfaces des moments positifs  
ures pleines et celles des momer

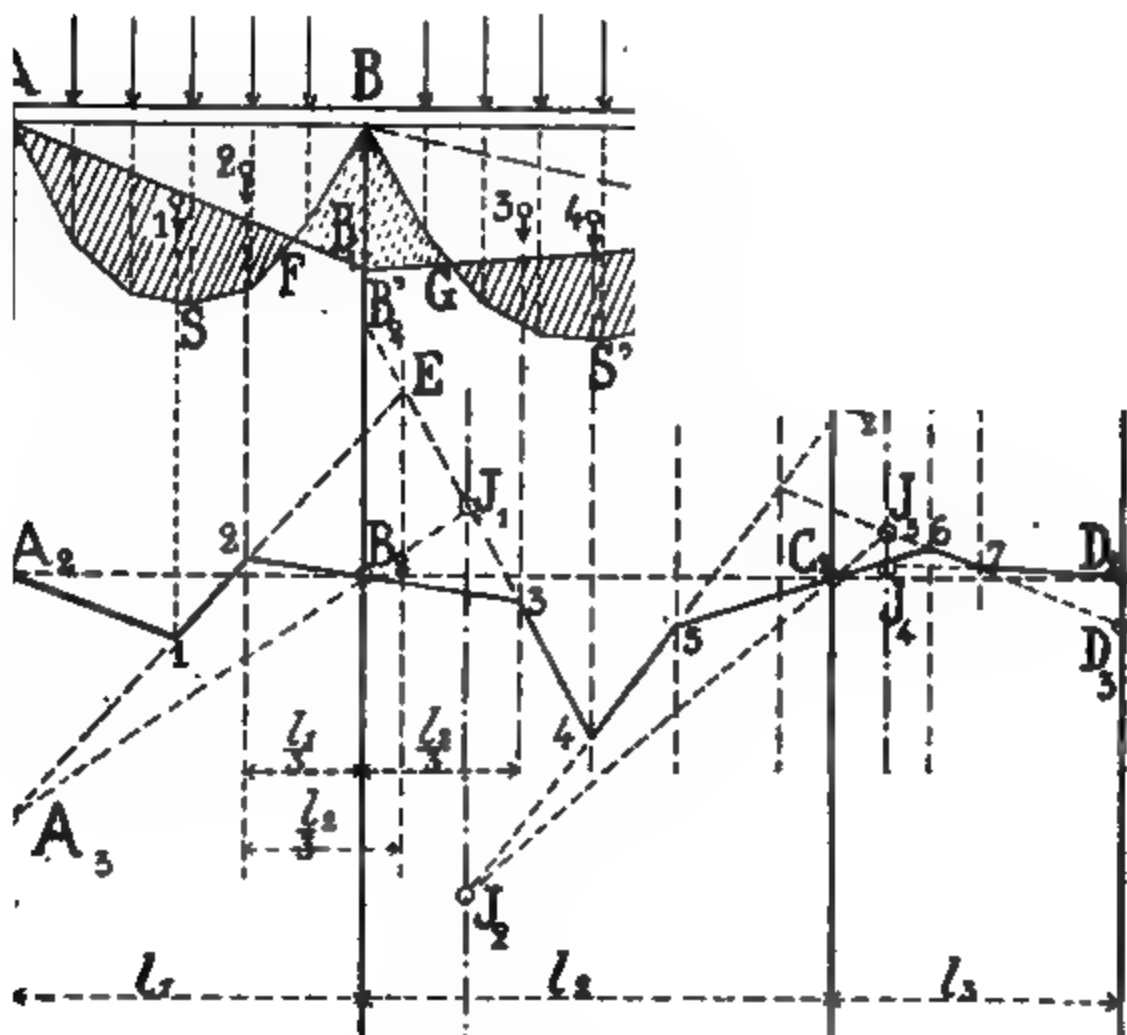


Fig. 216.

Il ressort de ce qui précède, qu'au moyen des polygones funiculaires et des moments sur piles BB<sub>1</sub> et CC<sub>1</sub>, on détermine facilement les moments fléchissants en chaque point de la poutre.

Les polygones funiculaires se tracent aisément comme nous avons indiqué à la page 26 ; mais les moments sur piles ne peuvent se construire qu'au moyen de la théorie de l'élasticité, en introduisant la condition que la ligne élastique, quelles que soient les charges, passera toujours par les points d'appui si ce sont des points fixes.

Nous avons donné à la page 28 le tracé de la ligne élastique au moyen de la surface des moments. On décompose cette surface en éléments, puis on divise les éléments de surface par une base de réduction  $\alpha$  et on se sert des longueurs ainsi obtenues comme forces fictives pour le tracé d'un deuxième polygone funiculaire.

Quand il s'agit seulement d'avoir la déformation, ou le point de passage de la ligne élastique en un point déterminé de la poutre, la division de la surface des moments en éléments peut être quelconque, pourvu qu'il y ait une division au point considéré. Il est permis aussi de grouper les éléments à volonté en moments positifs et négatifs.

Dans le cas qui nous occupe nous considérons 2 éléments dans les travées de rive, l'élément positif ASB et l'élément négatif ABB<sub>1</sub>. Dans chaque travée intermédiaire il y aura 3 éléments : un positif BS'C et deux négatifs BB<sub>1</sub>C<sub>1</sub> et BC<sub>1</sub>C. Les centres de gravité des surfaces portent, dans l'ordre où on les rencontre, en allant de gauche à droite, les numéros 1, 2, 3, 4, 5.... qui sont inscrits dans la figure.

Les avantages de ce mode de décomposition sont les suivants :

*Les surfaces des moments positifs sont indépendantes des moments sur piles.*

*Tous les éléments négatifs sont des triangles ayant pour hauteur la portée des travées ; leurs centres de gravité se trouvent toujours sur les mêmes verticales, qui divisent les travées en trois parties égales.*

La ligne élastique ou le polygone funiculaire tracé avec les éléments dont il vient d'être question, et considérés comme forces, sera de la forme indiquée en trait plein dans la figure, elle passera par les appuis A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub> et elle aura autant de sommets qu'il y a d'éléments. Ces sommets se trouvent sur les verticales passant par les centres de gravité des éléments et la position de toutes ces verticales, est indépendante des moments sur piles.

*Les surfaces des deux éléments négatifs situés à gauche et à droite d'une même pile, comme par exemple les éléments 2 et 3*

## CHAPITRE VII — POU

*proportionnelles au  
intr est donc fixe.*

gne par  $l_1, l_2, l_3$ , les 1

ents 2 et 3 sera situ

lance  $\frac{1}{3} l_1$  du point 3

$\frac{1}{3} l_1 + \frac{1}{3} l_2$  l'un de l

ls  $\frac{1}{3} l_1$  et  $\frac{1}{3} l_2$  pour d

aquelle se trouve la

ons pour ce motif

*des tiers interverti*

*s coupés sur une v*

*la ligne élastique correspondant à une surface*

*ue les côtés  $A_1-1$  et  $1-2$  ou  $3-4$  et  $4-5$ ,*

*nts des moments sur piles.*

représentent les moments d'une surface positive,

lépendante des moments sur piles, relativement

onsidérée. Tels sont les segments  $A_1A_2, D_1D_2$

se déterminer d'avance et donneront les points

que l'on trace plusieurs lignes élastiques ayant

que nous venons d'énumérer, en faisant passer

ixième côté  $1-2$  par un même point  $A_1$ . Nous

qu'une de ces lignes dans la fig. 216 pour ne pas

. Tous les triangles 2 E 3 formés par le prolonge-

tés  $1-2$  et  $3-4$ , et par le côté  $2-3$ , dans

ignes élastiques, auront leurs sommets sur des

1.

-3 passe toujours par un point fixe  $B_1$ ; le côté

ssi par un point fixe  $A_3$ .

théorème de géométrie de position, lorsqu'une

les ont leurs sommets correspondants sur trois

niveau de premier ordre et lorsque deux séries

correspondants convergent chacune en un même

des troisièmes côtés converge aussi en un même

Dans le cas que nous considérons, les triangles 2E3 de toutes les lignes élastiques remplissent les conditions de ce théorème, le sommet du faisceau étant à l'infini. Tous les côtés 3 — 4 passent par suite par un point fixe  $J_1$ .

La géométrie de position nous enseigne de plus que les trois points fixes  $A_3$ ,  $B_2$ ,  $J_1$  sont en ligne droite, et que si l'on déplace le point  $A_3$  sur une verticale, le point  $J_1$  se déplace aussi sur une verticale fixe.

Nous avons vu que tout segment, tel que  $J_1 J_2$ , intercepté sur une verticale entre les côtés 3 — 4 et 4 — 5, correspondant à un élément ou à une force positive, est indépendant des moments sur piles et peut se déterminer d'avance. La fixité du point  $J_1$  entraîne donc celle du point  $J_2$ .

En partant du point  $J_2$  et en opérant dans la 2<sup>e</sup> et la 3<sup>e</sup> travée, exactement comme nous venons de le faire dans la 1<sup>re</sup> et la 2<sup>e</sup> avec le point  $A_2$ , on trouve dans la 3<sup>e</sup> travée le point fixe  $J_3$ . Dans le cas où il y aurait plus de trois travées, en continuant de la même manière on arriverait à déterminer, à droite de chaque pile, deux points fixes  $J$  situés sur une verticale fixe.

De plus, les mêmes constructions peuvent se faire aussi en partant du point  $D_2$ , sur la verticale de la culée de droite, et en allant de droite à gauche; on détermine ainsi une nouvelle série de points fixes  $K$  et de verticales fixes. Ces points  $K$  ne sont pas indiqués sur la figure 216 pour ne pas la compliquer, mais ils sont indiqués dans la fig. 217.

Tous les points fixes  $J$  et  $K$  se désignent sous le nom de *points d'inflexion*; les verticales sur lesquelles ils se trouvent sont les *lignes d'inflexion*.

Il y a dans chaque travée 2 lignes d'inflexion et 4 points d'inflexion, mais dans les travées de rive l'une des lignes d'inflexion se confond avec la verticale des appuis des culées, et les points d'inflexion correspondants sont remplacés par les points  $A_2$ ,  $A_3$  et  $D_2$ ,  $D_3$ .

Les points d'inflexion suffisent avec les verticales 1 à 7 au tracé de la ligne élastique; à cet effet, les points d'inflexion se joignent en croix par les lignes tracées en plein dans la fig. 217 et l'on complète le tracé par les lignes pointillées.

# CHAPITRE VII — PO

érification, les côtés  
s tiers intervertis ; i  
-7.

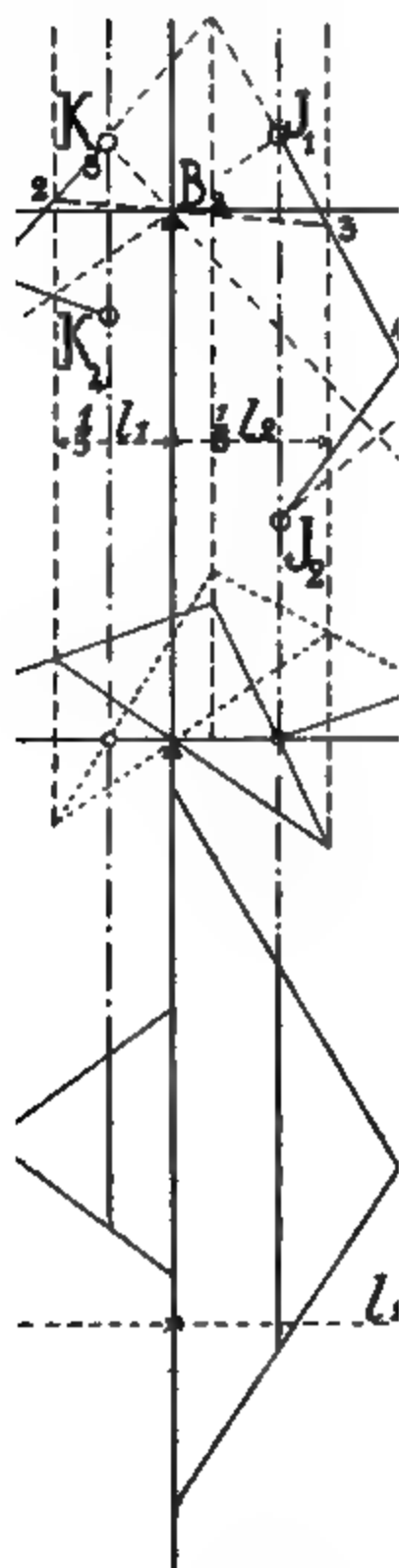


Fig. 21

ce qui précède, noi  
es idées, mais les m  
ombre quelconque de

Les lignes d'inflexion sont indépendantes des charges ; elles ne dépendent que des longueurs des travées. Quels que soient les segments  $A_1 A_2$  ou  $J_1 J_2$ , on retrouvera toujours les mêmes lignes d'inflexion. Ces segments pourront être nuls, le point  $A_2$  se confondra alors avec  $A_1$ , et tous les points  $J$  tomberont sur l'horizontale des appuis. La construction des lignes d'inflexion sera dans ce cas celle du milieu de la fig. 217. En allant de gauche à droite, la construction indiquée en traits pleins donne les lignes d'inflexion de gauche ; en allant de droite à gauche, celle qui est en pointillé détermine les lignes d'inflexion de droite. Dans le cas où les travées sont symétriques par rapport au milieu de la poutre, les lignes d'inflexion  $J$  et  $K$  le sont aussi.

En résumé, il ressort de ce qui précède que la ligne élastique se construit sans que l'on connaisse les moments sur les piles. A cet effet, on procède successivement aux constructions suivantes :

1° On mène les verticales passant par les centres des surfaces des éléments positifs et par le tiers des travées ;

2° On construit les lignes d'inflexion comme cela est indiqué au milieu de la fig. 217 ;

3° On trace les *lignes en croix* comme on le voit au bas de la fig. 217. Ces lignes s'obtiennent en portant sur les deux verticales des appuis de chaque travée des segments proportionnels au produit de l'élément de surface positif par la distance de son centre de gravité à l'appui considéré, puis en joignant en croix les extrémités des segments des deux appuis ;

4° On construit les points d'inflexion au moyen des segments verticaux  $A_1 A_2$ ,  $D_1 D_2$ ,  $J_1 J_2$ ,  $J_2 J_3$ ,  $K_1 K_2$ ,  $K_2 K_3$ , mesurés entre les lignes en croix sur les verticales correspondantes. En allant de gauche à droite, on porte  $A_1 A_2$ , on trace  $A_1 B_1$ ,  $J_1$ , on porte  $J_1 J_2$ , on trace  $J_2 J_3$ , on porte  $J_2 J_3$ . Ensuite on part de la droite, on porte  $D_1 D_2$ , on trace  $D_2 K_1$ , on porte  $K_1 K_2$ , on trace  $K_2 B_2$ ,  $K_3$ , et l'on porte  $K_3 K_4$ .

Les lignes en croix de chaque travée sont indépendantes des autres travées ; mais à chaque système de charges correspondent d'autres lignes en croix. Il est à peine nécessaire



de dire que les lignes en croix se coupent aux centres de gravité des éléments 2, 4, 7.

L'échelle des déformations verticales que dépend de celle des segments déduit.

## II. Détermination des moments

Dans le tracé de la ligne élastique loppé dans les pages précédentes, on a fait l'hypothèse sur ce que l'on désigne

L'échelle des déformations dont dépend des constantes :

$h$ , distance polaire du premier pôle, base de réduction des surfaces, la longueur par laquelle on divise les moments pour obtenir les longueurs que l'on obtient des forces ;

$h$ , distance polaire du 2<sup>e</sup> polygone

S'il s'agissait de déterminer les moments de préférence les constantes de moments en vraie grandeur. Mais on ne peut pas les déterminer sur les piles, et l'on arrive à déterminer pour les deux piles situées d'un côté en faisant  $ah = \frac{1}{6} l_2^2$ .

$l_2$  étant la portée de la travée. Pour les segments tels que  $B_1 B'_1$  et les verticales des appuis par les côtés du triangle élastique, représentent les moments du dessin.

Considérons le segment  $B_1 B'_1$ , pour lequel le moment de la surface triangulaire est une force appliquée au centre de la verticale de l'appui B. Ce moment est

$$\frac{1}{2} \frac{BB_1 \cdot l_2}{a} \times \frac{1}{2}$$

D'autre part, ce moment peut aussi s'exprimer par

$$\overline{B_2 B'_2} . h$$

Égalant les deux expressions, et remplaçant  $a.h$  par la valeur  $\frac{1}{6} l_2^2$ , il vient

$$\overline{B_2 B'_2} = \overline{BB_1}$$

Le segment  $B_2 B'_2$  est donc bien égal au moment sur la pile B.

Dans le cas le plus fréquent, où toutes les travées centrales ont une même portée  $l_2$  et où les travées de rive seules ont une portée plus petite  $l_1$ , on fera  $ah = \frac{1}{6} l_2^2$ . Les segments sur piles donneront alors dans toutes les travées (à l'exception de celles de rive) les moments sur piles. Dans le cas contraire, où les travées centrales diffèrent les unes des autres, les moments sur piles ne seront obtenus à l'échelle du dessin que dans la travée  $l_2$ , et dans les autres travées de portée  $l_1$  les segments seront à multiplier par le rapport  $\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$ .

Nous n'avons posé qu'une seule condition, que doivent remplir les constantes : c'est que l'on ait  $ah = \frac{1}{6} l^2$ , la valeur de l'une des constantes pouvant être quelconque.

Lorsque les quatre points d'inflexion d'une travée seront déterminés, il suffira, pour avoir les moments sur piles, de joindre en croix ces quatre points ; on sera dispensé de tracer la ligne élastique. De plus, on ne déterminera les moments sur piles que pour les travées où le système de charges considérées donne des efforts maximums.

Nous avons déjà vu que lorsque les moments sur piles sont connus, les moments dans tous les autres points de la poutre s'en déduisent dans le premier polygone funiculaire. Quant aux efforts tranchants, ils s'obtiennent, pour un point quelconque de la poutre, en menant dans le polygone des forces des parallèles aux côtés du polygone funiculaire, coupés par la verticale menée au point considéré.



$x$  du centre de gravité  $S$  du triangle  $ABC$  au point  $A$  est égale à

$$x = \frac{l}{2} + \frac{1}{3} \left( \beta l - \frac{l}{2} \right) = \frac{l}{3} (1 + \beta)$$

Les segments  $AA_1$  et  $BB_1$ , coupés par les lignes en croix sur les verticales, sont proportionnels aux moments de la surface du triangle  $ABC$  relativement aux verticales des appuis ; ils ont pour expression :

$$AA_1 = \frac{y \cdot l \cdot x}{2 \cdot a \cdot h} \quad \text{et} \quad BB_1 = \frac{y \cdot l \cdot x'}{2ka \cdot h}.$$

Pour  $a = \frac{1}{2}l$  et  $h = \frac{1}{3}l$ , donnant  $ah = \frac{1}{6}l^2$  (voir page 352),

il vient en remplaçant  $x$  et  $x'$  par leur valeur :

$$AA_1 = y(1 + \beta) \quad BB_1 = y(1 + \beta').$$

La construction de ces expressions peut se faire très simplement, comme cela est indiqué dans la figure 218, en portant à gauche et à droite de  $C'$  les longueurs  $C'D$  et  $C'D'$  égales à  $l$  et en menant les lignes  $D'C$  et  $DC$ . Ces lignes coupent sur les verticales des appuis les segments cherchés  $AA_1$  et  $BB_1$ .

On peut aussi adopter une autre construction : mener la ligne  $C_1 C_2$  parallèle à  $AB$ , puis du point  $C$ , des parallèles aux lignes  $BC_1$  et  $AC_2$  ; ces parallèles interceptent sur les verticales des appuis les segments cherchés  $AA_1$ ,  $BB_1$ .

Les lignes en croix se coupent sur la verticale du point  $S$ .

*b). Plusieurs charges.* — Dans le cas où il y a plusieurs charges concentrées, on peut déterminer séparément les segments  $AA_1$  et  $BB_1$  des lignes en croix, pour chacune des charges, et les additionner ensuite ; on peut aussi faire la construction suivante qui est plus rapide.

Les segments des lignes en croix ont pour expressions :

$$AA_1 = \Sigma y(1 + \beta) \quad , \quad BB_1 = \Sigma y(1 + \beta')$$

ou

$$AA_1 = \Sigma y + \Sigma \beta y \quad , \quad BB_1 = \Sigma y + \Sigma \beta' y$$

## CHAPITRE VII — POUTRES

se construisent dans le polygone indiqué dans la fig. 219, puis, à la suite les uns des autres.

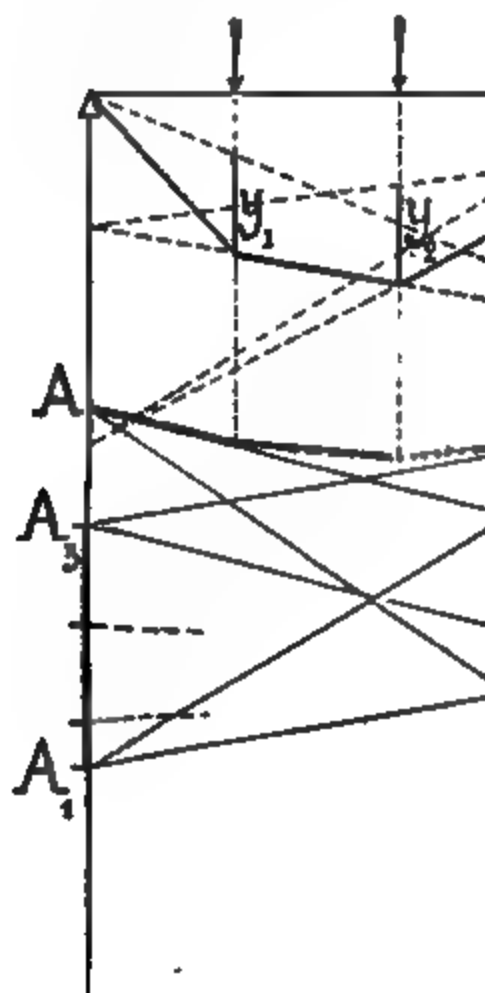


Fig. 219.

ale à  $l$ , on construit le polygone. On voit que les segments intérieurs de ce dernier polygone finissent par représenter les seconds ordres. On aura :

$$AA_2 = \sum \xi y \quad \text{et} \quad BB_1 = \sum \eta y$$

On ajoute ces longueurs à  $AA_1$  et  $BB_1$ , des lignes en croix, et on obtient la flèche de la poutre soumise à une charge uniformément répartie.

La flèche des moments est une parabole. On peut trouver la flèche de cette parabole par  $f$  la flèche de cette parabole, qui est égale à

$$\frac{2}{3} f.$$

La force correspondant à cette surface est égale à

$$\frac{2}{3} \frac{l \cdot f}{a}$$

et le moment de cette force appliquée au milieu de la travée, relativement à l'un des appuis, est

$$\frac{2}{3} \frac{l f}{a} \cdot \frac{l}{2} = \frac{f l^2}{a 3}.$$

Ce même moment est aussi égal à

$$\overline{B_2 B_3} \cdot h$$

En égalant les deux valeurs et en posant  $ah = \frac{1}{6} l^2$ , comme précédemment, il vient :

$$\overline{B_2 B_3} = 2 f.$$

Les segments sur piles sont égaux au double de la flèche de la parabole.

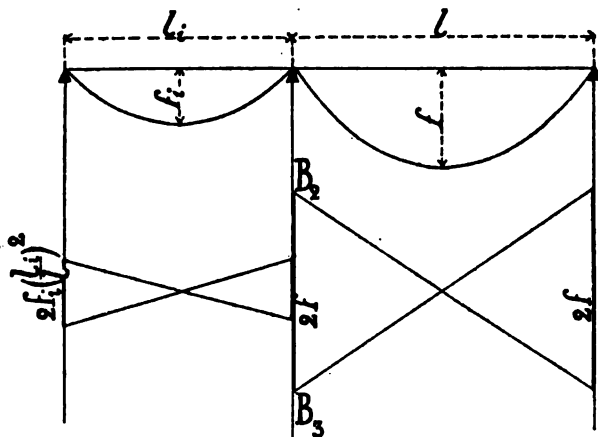


Fig. 220.

Dans les travées qui ont une portée  $l_i$  différente de la portée  $l$ , les segments que l'on obtiendra, soit pour des charges concentrées, soit pour des charges uniformément réparties, seront à multiplier par le rapport  $\left(\frac{l_i}{l}\right)^2$ , pour les ramener à la même échelle correspondant à  $ah = \frac{1}{6} l^2$ .

E V

les .

a à

*che*

es se

nt à

----

----

////

／

／

／

／

a lo

les

es

mer

n B

a d

AC

$\Omega =$

ette

nts

Relativement à l'appui de gauche, situé du côté de la charge :

$$M_g = \frac{1}{2} l \cdot \overline{AD} \cdot \frac{1}{3} l - \frac{1}{3} \beta l \cdot \overline{AD} \frac{1}{4} \beta l = \frac{1}{12} p \cdot \overline{AD} \cdot (2 - \beta^2).$$

Relativement à l'appui de droite, situé du côté opposé à la charge :

$$M_d = \frac{1}{2} l \cdot \overline{AD} \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{3} \beta l \cdot \overline{AD} (l - \frac{1}{4} \beta l) = \frac{1}{12} p \cdot \overline{AD} (2 - \beta^2).$$

La quantité  $\overline{AD}$  peut être considérée comme le moment statique de la réaction en B, par rapport à l'appui A, et si l'on désigne par  $H$  la distance polaire du premier polygone des forces, nous aurons :

$$\overline{AD} = \frac{1}{2} \frac{p \cdot \beta^2 l^2}{H},$$

$p$  étant la charge uniformément répartie par mètre courant. Introduisant cette valeur dans les formules ci-dessus, il vient :

$$M_g = \frac{p l^4}{24 H} \beta^2 (2 - \beta^2)$$

et

$$M_d = \frac{p l^4}{24 H} \beta^2 (2 - \beta^2).$$

Si l'on compare ces moments à ceux qui correspondent à la charge uniformément répartie sur toute la travée, et qui sont égaux à

$$M_g = M_d = \frac{p l^4}{24 H},$$

on voit que pour passer de la charge totale à la charge partielle, il suffit de multiplier le segment de la charge totale par  $\beta^2(2 - \beta^2)$  pour le côté chargé, et par  $\beta^2(2 - \beta^2)$  pour le côté opposé à la charge.

Nous donnons ci-contre le tableau des valeurs de ces expressions, pour la travée divisée en 20 parties :



$\beta$	$\beta^2 (2-\beta^2)$ côté chargé	c
0,05	0,0050	
0,10	0,0199	
0,15	0,0449	
0,20	0,0784	
0,25 — $\frac{1}{4}$	<u>0,1211</u>	
0,30	0,1719	
0,35	0,2300	
0,40	0,2944	
0,45	0,3640	
0,50 — $\frac{1}{2}$	<u>0,4375</u>	
0,55	0,5135	
0,60	0,5904	
0,65	0,6664	
0,70	0,7399	
0,75 — $\frac{3}{4}$	<u>0,8086</u>	
0,80	0,8704	
0,85	0,9230	
0,90	0,9639	
0,95	0,9905	
1,00	1,0000	

Dans le plus grand nombre de cas, les charges pourront se remplacer par des charges unitaires. Les poutres continues ne s'emploient, en général, que pour des portées un peu grandes<sup>1</sup>, et les charges sont rapprochées les unes des autres, il en résulte que les résultats en remplaçant les charges par une charge uniformément répartie. Les épures de moments et de coup par cette substitution et l'étude des charges uniformément réparties devient plus facile. On déterminera d'abord la charge uniformément répartie qui équivaut à la charge roulante; cette charge varie avec la portée des travées.

Nous calculerons la charge uniformément répartie équiva-

1. Lorsque les travées sont petites un soulèvement des appuis peut se produire sous la surcharge partielle, ce qui a des inconvénients.

lant à la surcharge roulante en supposant que les travées sont discontinues. S'agit-il d'une travée de portée  $l$ , par exemple, nous construirons le moment maximum  $M$  au milieu de la travée par la méthode connue, au moyen de polygones funiculaires, et nous déduirons de ce moment la charge  $p$  par mètre courant uniformément répartie

$$p = \frac{8M}{l^2}.$$

La charge équivalente n'est pas la même pour les moments et pour les efforts tranchants. Si  $T$  est l'effort tranchant maximum correspondant à la charge roulante dans une travée isolée, la charge uniformément répartie équivalant à la charge roulante pour les efforts tranchants est égale à :

$$p' = \frac{2T}{l}.$$

Lorsque les charges  $p$  et  $p'$  sont peu différentes l'une de l'autre, on introduira la plus grande dans tous les calculs. Dans le cas contraire, on se servira de  $p$  pour le calcul des moments et de  $p'$  pour les efforts tranchants.

#### IV. Influence d'une charge unique agissant en différents points de la poutre. Charges défavorables

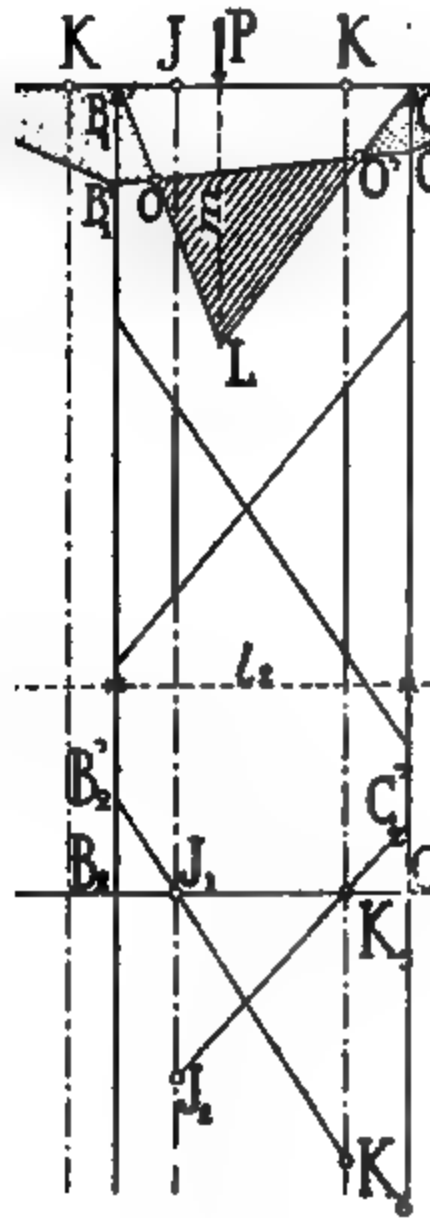
Pour étudier l'influence des charges sur les différentes travées d'une poutre continue, nous considérerons une poutre à 5 travées (fig. 222) et nous placerons une charge unique dans la deuxième travée. Les lignes d'inflexion sont représentées par des —.—.— ; elles ont été construites comme cela a été fait précédemment (fig. 217).

Il n'y a un polygone funiculaire et des lignes en croix que dans la travée 2, qui est chargée ; dans les autres travées, les lignes en croix se confondent.

La ligne élastique est tracée au bas de la fig. 222 ; elle a servi à déterminer les moments sur piles, puis les surfaces des moments au hant de la figure.

## CHAPITRE VII —

On a fait  $ah = \frac{1}{6} l_1^2$ , les  
 o élastique représente  
 is que les moments au  
 liant les segments D,U



Fig

surfaces des moments  
 celles des moments né  
 is toutes les travées no  
 ite, le moment est nég  
 chargée, et sur les pile  
 et négatif. Il existe da  
 moments sont nuls :

qu'un de ces points, et il ressort de la construction même des moments sur piles que dans les travées libres ces derniers points tombent sur les lignes d'inflexion  $K$ , à droite de la travée chargée et sur les lignes d'inflexion  $J$  à gauche. C'est cette propriété qui explique le nom donné aux lignes d'inflexion.

Il ressort de la fig. 222 que l'influence d'une charge va en diminuant à mesure que l'on s'éloigne de cette charge.

Dans la travée chargée, les points  $O$  et  $O'$ , où les moments sont nuls, ne tombent pas sur les lignes d'inflexion. L'intensité de la charge n'a aucune influence ni sur la position de ces points  $O$  et  $O'$ , ni sur les signes des moments, ceux-ci varient proportionnellement à la charge. S'il s'agit de déterminer les parties de la travée où les moments sont positifs ou négatifs, pour différentes positions de la charge, nous pourrons donc en déplaçant la charge, faire varier son intensité comme il nous plaira.

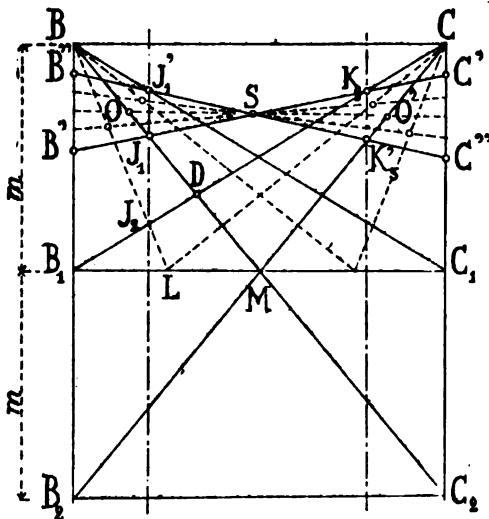


Fig. 223.

Supposons que l'intensité de la charge varie de manière à conserver toujours au triangle  $B_1LC_1$  la même hauteur  $m$  et par suite aussi la même surface, et déterminons les positions limites des points  $O$  et  $O'$ . Lorsque la charge se trouve infiniment

## CHAPITRE VII — POUT

du point B, le centre de gravité  
de  $\frac{1}{3} l_2$  de l'appui B et le segment  
x sur la ligne d'appui B est égale  
à l'expression :

$$\frac{\frac{1}{2} m l_2 \cdot \frac{1}{3}}{ah}$$

en faisant  $ah = \frac{1}{6} l_2^2$ , on a bien  
pour  $m$ , tandis que le segment se  
divise en trois BC<sub>2</sub> et B<sub>1</sub>C cor-  
respondent en D sur la ligne du tiers  
au point K<sub>2</sub> au point J<sub>1</sub>, on obtient  
BB' et CC' représentent les moitiés  
compare cette construction à  
celle n'en diffère qu'en ce que la ligne  
est horizontale.

La ligne B'C' est la ligne de fermeté  
et la construction symétrique, qu'on  
trace en C, on trouve la ligne de fermeté  
et K<sub>2</sub>'.

En jetant un coup d'œil sur la figure  
des points J<sub>1</sub> et K<sub>2</sub>' il suffit de  
point M étant au milieu de B<sub>1</sub>C  
à tracer les lignes B<sub>1</sub>C et BC<sub>1</sub>. Dans  
la charge sur les appuis, l'un des  
est la ligne d'inflexion. Quand la charge  
est O' tombe en K<sub>2</sub>, quand elle  
est en J<sub>1</sub>'.

On peut faire la construction de  
des positions intermédiaires de  
la charge est une courbe du second

deux projectifs, ayant leur sommet en S et en B pour les  
points O, et en S et C pour le point O'. La construction des  
points O et O' se fera en divisant les lignes B'B'', C'C'' en un cer-  
tain nombre  $n$  de divisions égales, en divisant aussi B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> en un  
nombre  $n$  de divisions égales, et en construisant les faisceaux

S, B et C. Les rayons correspondants des faisceaux S et B se coupent sur les points O ; ceux des faisceaux S et C sur les points O'.

On voit sur la figure que lorsque la charge se déplace de B en C le point O se meut de B' en J', tandis que le point O' va de K<sub>3</sub> à C''. Les points O et O' ne peuvent jamais se trouver entre les lignes d'inflexion d'une travée ; ils sont toujours situés entre les lignes d'inflexion et l'appui voisin.

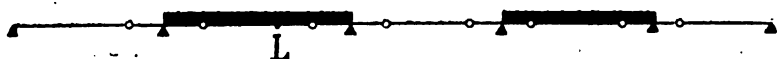


Fig. 224.



Fig. 225.

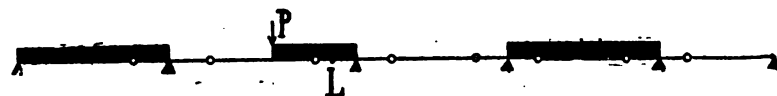


Fig. 226.

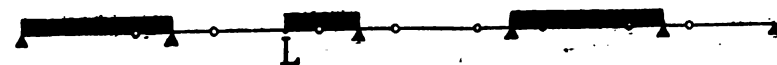


Fig. 227.

Les conclusions à tirer de ce qui précède sont les suivantes :

a) Le moment maximum positif en un point L dans la partie d'une travée située entre les lignes d'inflexion, s'obtient en chargeant complètement la travée considérée, ainsi que toutes les autres travées, de deux en deux. Si le numéro de la travée est pair, on chargera toutes les travées paires, s'il est impair, toutes les travées impaires (fig. 224).

b) Le moment maximum positif en un point L, situé entre une ligne d'inflexion de gauche ou de droite et un appui, peut se déterminer en construisant la charge P, pour laquelle les points d'inflexion O ou O' se confondent avec le point considéré. Toute la partie de la travée située entre cette charge et l'appui voisin

*du point considéré est à charger. Les autres travées seront chargées de deux en deux, comme l'indiquent les figures 225 et 226. On peut aussi, et cela est préférable, admettre des limites de charges et déterminer la section L correspondant aux moments maximums.*

*c) Les moments maximums négatifs s'obtiennent en chargeant la partie complémentaire de celle qui donne les moments positifs maximums.*

Pour les efforts tranchants, nous désignerons comme précédemment par cette expression la force extérieure à gauche de la section et nous donnerons le signe positif aux efforts dirigés de bas en haut.

En chaque point qui correspond à un maximum ou à un minimum des moments fléchissants, l'effort tranchant change de signe. Il en résulte qu'en déplaçant la section L d'une extrémité A de la poutre à l'autre, fig. 222, l'effort tranchant change de signe chaque fois que l'on rencontre une pile, ainsi qu'à la rencontre de la charge P. Il est facile de voir que *l'effort tranchant maximum positif s'obtient en chargeant toute la partie de la travée située à droite de la section considérée et toutes les autres travées de deux en deux, comme l'indique la fig. 227 pour la section en L. L'effort tranchant maximum négatif s'obtient en chargeant la partie complémentaire de celle qui donne l'effort positif.*

Si l'on compare les fig. 226 et 227, on voit qu'il y a une analogie entre les charges de ces deux figures : une charge qui donne un effort tranchant maximum donne en même temps un moment maximum, en un autre point de la même travée.

Nous indiquons plus loin, page 374, pour l'exemple de la planche 19, le diagramme des charges défavorables pour une poutre à 4 travées.

#### V. Abaissement des appuis

Si l'on abaisse un ou plusieurs des appuis d'une poutre continue, elle suit le mouvement, en vertu de son élasticité. Mais toute différence de niveau, entre les appuis d'une poutre qui était droite à l'origine, modifie la répartition des efforts.

On peut, soit déterminer directement ceux-ci dans la poutre déformée, soit déterminer d'abord les efforts comme si la poutre était droite et ajouter ensuite ceux qui sont dus à la différence de niveau des appuis.

Le déplacement vertical des appuis ne change pas la position des lignes d'inflexion, qui ne dépend que des distances horizontales; les lignes en croix ne se modifient pas non plus.

Pour obtenir les moments sur piles, on tracera la ligne élastique en la faisant passer par les appuis déplacés. Les déplacements des appuis devront être à cet effet portés à l'échelle de la ligne élastique. En joignant en croix les points d'inflexion de celle-ci, on obtiendra comme précédemment, sur les appuis, des segments représentant les moments sur piles. Dans la figure 228, par exemple, on a abaissé l'appui B en  $B_2$ .

Lorsque l'on tient compte en même temps des charges et de l'abaissement de l'appui B, les moments sur les piles B et C sont représentés par les segments  $B_2B_2'$  et  $C_2C_2''$ . Dans le cas où l'on ne tient compte que de l'abaissement de l'appui, les points  $J_1$  et  $J_2$  se confondent en  $J_{1,2}$ , les points  $K_1$  et  $K_2$  en  $K_{1,2}$  et les moments sur piles sont représentés par  $B_2B_2''$  et  $C_2C_2''$ .

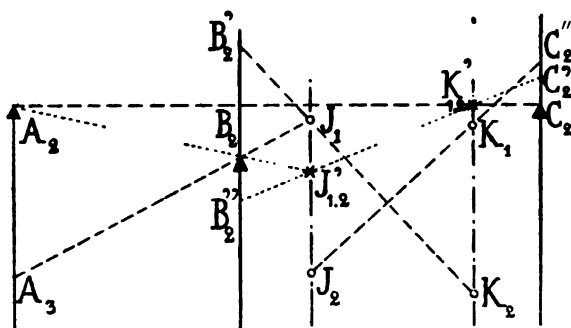


Fig. 228.

Pour se rendre compte de l'influence d'un abaissement d'appui sur les moments, on peut supposer que la poutre est sans poids, que l'on a supprimé entièrement l'appui B et que l'on applique en ce point une charge verticale qui déforme la poutre en abaissant l'appui de la quantité donnée. On réalisera



## CHAPITRE VII — POUTE

si exactement les conditions de  
 is aurons une travée de moins,  
 nts fléchissants, en vertu de IV,  
 iquée dans la fig. 229.

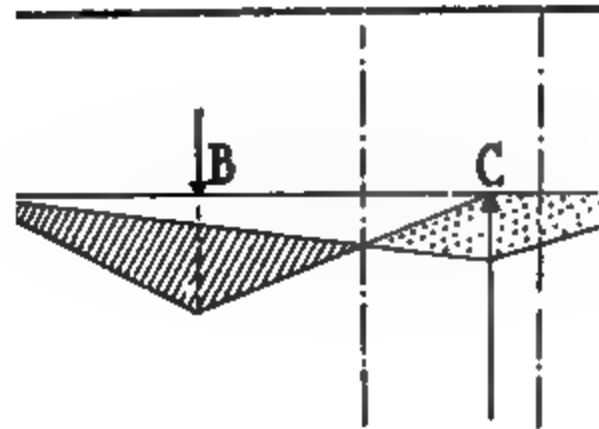


Fig. 229

Il résulte de l'examen de la figure  
 augmente, en valeur absolue,  
 ctions sur les piles voisines ains  
 ix en deux, tandis qu'on diminue  
 piles et les réactions sur les au  
 exemple, les moments négatifs  
 dis que les moments sur la pile  
 Il résulte aussi de l'examen de la  
 uissement d'appui sur les mome  
 que à mesure que l'on s'éloigne  
 Il nous reste à voir comment on  
 ne élastique.

Les déplacements verticaux ont

$$\Delta v = \sum \frac{M \cdot \Delta^3}{EI}$$

M est le moment fléchissant,  $\Delta$   
 a distance du point considéré a  
 fficient d'élasticité et I le mom  
 Les moments M se construisent  
 s forces ayant une distance pol

par  $y$  les ordonnées du premier polygone funiculaire on a :

$$M = yH.$$

Les déformations à l'échelle du dessin se construisent en portant dans un second polygone des forces, comme forces fictives les expressions  $M\Delta x$  et en construisant avec une distance polaire égale à  $EI$  un deuxième polygone funiculaire. Les ordonnées de ce dernier polygone représenteront les déformations. Mais au lieu de porter les  $M\Delta x$  comme forces, on porte les expressions  $y \frac{\Delta x}{a}$  ; d'autre part on prend une distance polaire  $h$ . Les déformations obtenues seront par suite à multiplier par

$$n = \frac{a.H.h}{E.I}$$

pour les réduire à l'échelle du dessin, et comme  $ah$  a été pris égal à  $\frac{1}{6} l_2^2$ , on aura

$$n = \frac{H.l_2^2}{6.E.I}$$

Si l'on désigne par  $\frac{1}{k}$  l'échelle du dessin, les déplacements des appuis seront à porter dans la figure à l'échelle.

$$\frac{6 E . I}{H . l_2^2 . k}$$

Pour la valeur de  $I$ , que l'on a supposée constante, on prendra une valeur moyenne ; pour  $E$ , dans le cas d'une poutre en fer,  $16 \times 10^9$ .

## VI. Exemple des planches 19 et 20

L'exemple traité dans les planches 19 et 20 est celui d'une poutre à 4 travées : 2 travées de rive de 52 m. et deux travées centrales de 65 mètres <sup>1</sup>.

1. Cet exemple est celui de la Statique graphique de Culmann 1<sup>re</sup> édition, et de W. Ritter, ligne élastique.

## CHAPITRE VII — POUTRE

es charges au mètre courant se  
 2.200 k. de charge perm  
 4.500 k. de surcharge,  
 6.700 k. de charge totale  
 épure a été faite en deux plan  
 complète, il faudrait les met

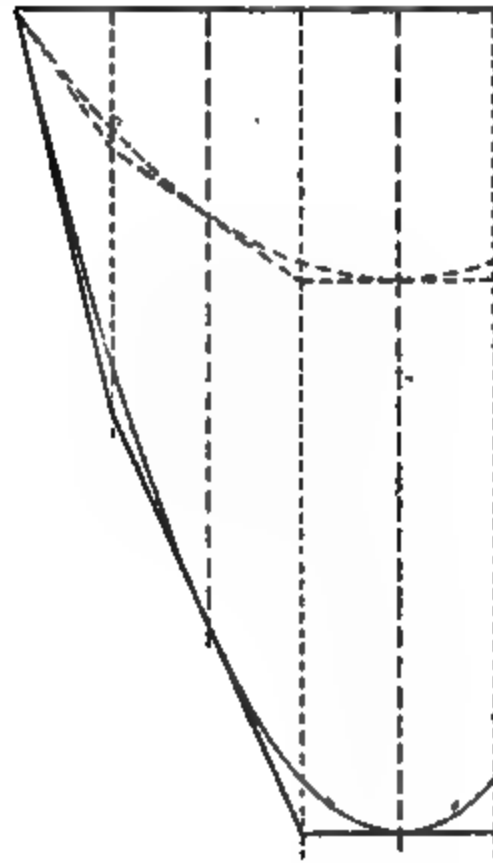


Fig. 230.

La poutre est symétrique; il suffi  
 er les moments et les efforts tr  
 de gauche. Ceux des travées d  
 échelle du dessin est de un m  
 n. pour 10.000 k.  
 Dans la fig. 1, on a tracé les par  
 s. Elles peuvent se construire  
 issants au milieu des travées e  
 moments comme flèches des p  
 .re au moyen des polygones d  
 e à cet effet les travées en qua  
 au milieu des divisions le qua

vée considérée et l'on trace le polygone funiculaire. Cette construction est indiquée dans la fig. 230 pour la charge permanente et pour la charge totale. Chaque polygone funiculaire donne cinq tangentes à la parabole qui permettent de la tracer. Les mêmes tangentes serviront à la construction des polygones correspondant aux surcharges partielles.

Les charges que nous introduirons dans les polygones des forces sont les suivantes :

Dans une travée de rive :

$$\text{Poids propre, } \frac{1}{4} \cdot 2.200 \times 52 = 28.600 \text{ k.}$$

$$\text{Charge totale, } \frac{1}{4} \cdot 6.700 \times 52 = 87.100 \text{ k.}$$

Dans une travée centrale :

$$\text{Poids propre, } \frac{1}{4} \cdot 2.200 \times 65 = 35.750 \text{ k.}$$

$$\text{Charge totale, } \frac{1}{4} \cdot 6.700 \times 65 = 108.875 \text{ k.}$$

Les charges correspondant au poids propre sont indiquées à gauche de la verticale des forces, celles de la charge totale à droite. La distance polaire est égale à 10 m. 00 et donne l'échelle des moments qui est dix fois plus petite que celle des forces soit 2 mm. pour 100.000.

La parabole du poids propre est tracée en pointillé, celle de la charge totale est en trait plein.

*Charges partielles.* Les charges partielles que nous considérons sont indiquées en diagramme dans la Pl. 20 et fig. 233, page 374 ; il y a en tout 20 cas qui se réduisent en réalité à 18, car les numéros 3 et 16, 10 et 11 sont identiques ; ils ne sont indiqués en double que pour conserver au diagramme sa régularité. Ces charges partielles permettent de déterminer les moments fléchissants et les efforts tranchants maximums, en un assez grand nombre de points pour qu'on puisse tracer les courbes des maximums avec exactitude.

*Lignes en croix.* — Les lignes en croix ont été construites dans la fig. 2 de la planche 19, pour la charge permanente et pour la charge totale. Dans la deuxième travée on a porté sur les verticales des appuis les longueurs  $FF'$  et  $GG'$  égales à la double flèche de la parabole de la charge totale, puis on a

mené les lignes FG et G'F' qui sont l'pondant à la charge totale. Celles d s'obtiennent en portant les longuen double de la flèche de la parabole du FG et F''G'' représentent les lignes c manente.

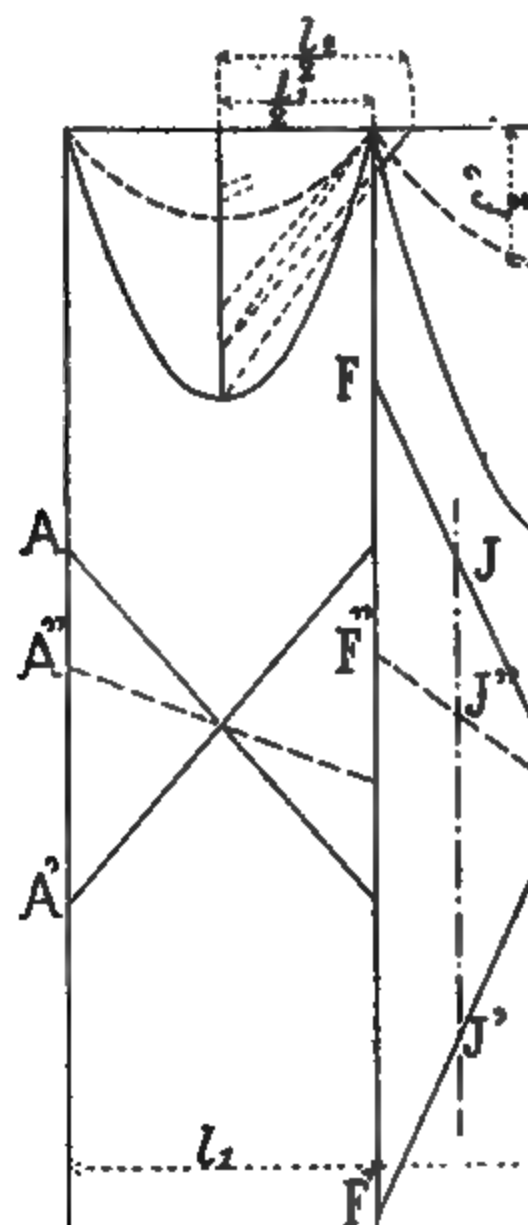


Fig. 231.

Dans la première travée, les lign truites de la même manière, mais e des paraboles par le rapport  $\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 =$  tion se fait graphiquement (voir fig.

Les segments correspondant aux terminent en divisant les segments

rapports indiqués au tableau de la page 360, et en inscrivant à chaque division le numéro du cas de surcharge auquel elle correspond.

*Lignes d'inflexion.* — Les lignes d'inflexion sont construites dans la fig. 3, exactement comme cela est expliqué à la page 351 et fig. 217. Celles de gauche sont obtenues en partant de l'appui A, celles de droite en partant de l'appui E. La ligne des tiers intervertis des travées 2 et 3, qui sont semblables, tombe sur l'appui C.

Comme vérification, les lignes d'inflexion ainsi construites doivent être symétriques par rapport à l'appui C.

*Points d'inflexion.* — Les points d'inflexion sont construits dans la fig. 4, Pl. 20, pour tous les cas de surcharge ; ils portent le numéro du cas auquel ils appartiennent. Un grand nombre de ces points d'inflexion sont communs à plusieurs cas. Il n'est pas nécessaire de construire tous les points d'inflexion qui correspondent à un cas de surcharge donné ; il suffit de connaître ceux qui servent à déterminer les moments sur les piles adjacentes à la travée dans laquelle le cas de surcharge donne un maximum.

La construction des points d'inflexion n'est indiquée entièrement que pour le cas n° 5, pour les autres cas la construction est la même, mais elle n'est indiquée que par des petits traits. On commence par porter sur la verticale de l'appui A le segment A5 mesuré entre les lignes en croix ; on trace la ligne 5B5, qui détermine le point d'inflexion 5 sur la ligne d'inflexion de gauche de la deuxième travée. Le second point d'inflexion de la même ligne s'obtient en portant le segment 5-5', mesuré entre les lignes en croix. Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin ; mais en opérant de la même manière et en partant du point E, on trace successivement les lignes 5D5, 5'C5 ; on obtient ainsi le point d'inflexion supérieur 5 de la ligne d'inflexion de droite de la deuxième travée. Sous ce point 5, on porte le segment 5-5' mesuré entre les lignes en croix.

Tous les segments portés, soit sur les verticales des appuis A et E, soit sur les lignes d'inflexion, se mesurent entre les lignes en croix, correspondant au cas de surcharge considéré. L'origine des segments est commune à tous les cas : c'est l'in-

tersection de la ligne en croix tracée en trait plein et qui descend de gauche à droite avec la verticale considérée. Le second point se déplace; il est donné par la ligne pointillée pour la charge permanente et par la ligne pleine montante pour la charge totale. Pour les charges partielles, le second point est indiqué par un petit trait et par le numéro du cas de la surcharge auquel il correspond.

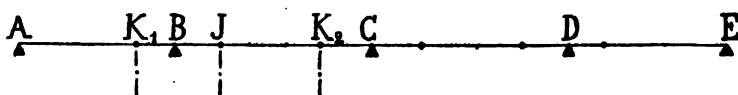


Fig. 232.

*Moments sur piles.* — Les moments sur piles s'obtiennent en joignant en croix, par deux lignes droites, les quatre points d'inflexion de la seconde travée et en prolongeant ces lignes jusqu'aux appuis; cette construction est indiquée dans la planche

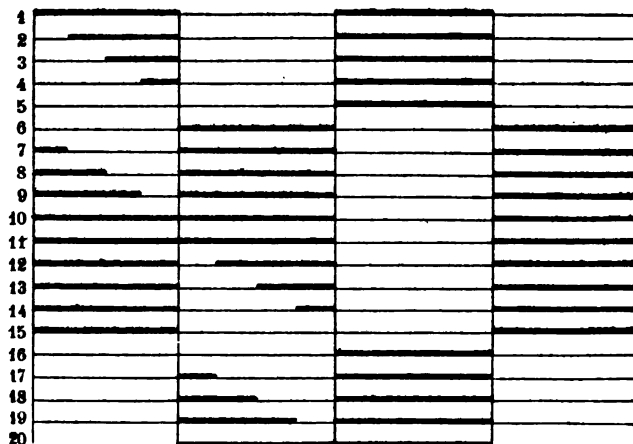


Fig. 233.

20, fig. 4, pour le cas n° 5; dans les autres cas les intersections des lignes avec les verticales des appuis sont marquées seulement par des petits traits portant le n° de la charge. Ces intersections déterminent les moments sur piles.

**Moments maximums.** — Les moments maximums se construisent dans la fig. 1. Pour le cas de surcharge totale, la courbe des moments est toute tracée; il suffit de porter sur chaque appui le moment sur pile, comme cela a été indiqué, fig. 216, page 346, et de tracer les lignes de fermeture du polygone. La surface ombrée représente la surface des moments.

Nous résumons dans le tableau suivant les maximums correspondant aux différents cas de surcharges (voir fig. 232 et 233).

Désignation des cas de surcharge	Moments positifs maximums	Moments négatifs maximums
1 2 — 3 — 4 — 5 6 7 — 8 — 9 10 ou 11 12 — 13 — 14 — 15 16 — 17 — 18 — 19 20	entre A et K <sub>1</sub> entre K <sub>1</sub> et B entre J et K <sub>2</sub>  entre K <sub>2</sub> et C entre B et J	entre J et K <sub>2</sub>  entre A et K <sub>1</sub> entre K <sub>1</sub> et B en B entre B et J entre K <sub>2</sub> et C en C

Les charges totales ne donnent des maximums qu'en des points ou sur des portions de la poutre qui sont bien déterminés d'avance. Pour les surcharges partielles il n'en est pas ainsi, et il est nécessaire de déterminer dans chacun des cas de surcharge, le point où cette surcharge donne un maximum. La construction de ce point est faite (fig. 5, Pl. 20) dans les travées 3 et 4, où l'on disposait de plus de place. Pour l'appliquer aux travées 1 et 2, il suffit de rabattre la figure autour de la verticale C, qui est l'axe de symétrie. Les verticales menées par les points entourés de cercles (fig. 5) donnent les sections où les surcharges produisent des moments maximums. La construction est exactement la même que celle qui est indiquée dans la fig. 223 du texte, page 363. Les verticales ont été reportées dans les fig. 4 et 6, où l'on mesure les moments maximums. Pour construire ces moments maximums, la marche à suivre est la suivante: tracer le polygone funiculaire correspondant à la charge partielle, mener la ligne de fermeture qui est déterminée par les moments sur pile, puis mesurer le segment intercepté sur la



## — POUTRES CONTINUES

é, entre la ligne de fermeture et le représente le moment cherché. Le pose de deux segments de paraboles, une au point où la surcharge finit

On peut se dispenser de tracer le polygone complet : il suffit de connaître ses extrémités sur les verticales des appuis et le point où il rencontre la section verticale considérée. Nous indiquons dans les deux fig. 234 et 235 les constructions qui ont été employées dans la planche, mais qui ne s'y trouvent pas indiquées complètement pour ne pas la surcharger.

Dans la fig. 234, la surcharge de la travée, les tangentes  $L'B'$  et ont été menées au point  $L$  où s'arrête porté  $B''B''$  égal à  $BB'$ . Les points  $B''$  polygone funiculaire. On porte ensuite  $B''B_1$  et  $CC_1$  et la ligne  $B_1C_1$  représente le moment fléchissant en un point  $L$ , est égal au segment  $K_1K'$ . Le moment  $F$  situé à gauche du point  $L$  est entre  $F_1F'$  et  $F_2F''$ .

Dans la fig. 235, la surcharge s'étend sur un quart de la travée : les tangentes  $L'C'$  et  $L'C''$  ont été menées comme précédemment, et l'on a porté  $C'C''$  égal à  $CC''$ . Les points  $C''$  et  $B$  sont les extrémités du polygone funiculaire. La ligne de fermeture  $B_1C_1$  s'obtient en portant les segments  $C''C_1$  et  $BB_1$  qui représentent les moments sur piles.

Le moment en un point  $K$ , à gauche du point  $L$ , est égal au segment  $K_1K'$ . Le moment fléchissant

sant en un point F, à droite du point L, est égal à la différence des segments  $F_1F'$  et  $F_2F''$ .

*Courbe des moments fléchissants maximums.* — Connaissant les moments maximums, il devient facile de construire la courbe de ces moments, c'est ce qui a été fait dans la fig. 6, Pl. 20. Les parties de cette courbe comprises entre les lignes d'inflexion d'une même travée sont des branches de paraboles. Ces paraboles sont les mêmes que celles qui ont été tracées dans la fig. 1 pour la charge permanente et pour la charge totale. La parabole de la charge totale sert pour les moments positifs, celle de la charge permanente pour les moments négatifs.

Les parties des courbes situées entre les lignes d'inflexion et les appuis s'obtiennent, en portant sur les verticales déterminées dans la fig. 5, les moments maximums correspondant à ces verticales et construits dans la fig. 1. On réunit ensuite les points obtenus par une courbe. Les points que l'on trouve en portant les ordonnées ont sur la figure le n° de la surcharge correspondante.

*Efforts tranchants maximums.* — Les efforts tranchants maximums s'obtiennent dans le polygone des forces ; il suffit, comme nous l'avons déjà dit, de mener dans ce polygone, par le pôle, deux rayons parallèles, l'un à la ligne de fermeture du polygone funiculaire, l'autre au côté de ce polygone coupé par la section verticale au point considéré. Le segment intercepté entre les deux rayons, sur la verticale des forces, représente l'effort tranchant.

Nous résumons dans le tableau suivant les maximums correspondant aux différents cas de surcharge.

Les extrémités des rayons qui interceptent dans les polygones des forces (fig. 7 et 8) les efforts tranchants maximums portent les n° des cas de surcharge correspondants.

Dans la fig. 9, on a porté les efforts tranchants maximums comme ordonnées et on a tracé les courbes des efforts tranchants maximums. Ces courbes ont été tracées dans les travées 3 et 4 ; pour avoir celles des travées 1 et 2, il suffit de les rabattre autour de la verticale de l'appui C.

## CHAPITRE VII — POUTRE

n° charge.	Efforts tranchants.
	positifs.
— 5	en A entre A et B
0	
— 15	en B, 2 <sup>me</sup> travée entre B et C
— 19	

### Construction approximative de tranchants

Un grand nombre de cas  
proximativement les cas  
des efforts tranchants maximaux  
cas de surcharge totale

1, 5, 6, 10, 15, 19

ce que nous avons vu  
de toutes les parties des  
ion d'une même travée  
ge totale d'une ou de p  
anches de ces courbes  
l'appui voisin, les cas  
es points extrêmes situés  
les tangentes en ces points  
ans la fig. 1.

, par exemple, la branche  
e les points K<sub>1</sub> et C (fig.  
et donné par le cas 16  
. en menant la tangente  
ig. 1), en prolongeant  
ntre V avec la ligne de  
V de la fig. 1, en V' (fi

est un point de la tangente au point 16. On déterminerait de la même manière la tangente au point extrême 20.

La branche de courbe étant courte, on pourra la tracer assez exactement au moyen des deux tangentes extrêmes et des points de tangence correspondants.

On ne considère en général que les maximums en valeur absolue, et ces maximums sont donnés presque complètement par les moments positifs entre les lignes d'inflexion d'une même travée, et par les moments négatifs dans les autres parties comprises entre les lignes d'inflexion et les appuis. Dans le voisinage des lignes d'inflexion, ce sont tantôt les moments positifs et tantôt les moments négatifs qui donnent ces maximums.

Il est utile de remarquer que, dans le voisinage des lignes d'inflexion, la détermination des moments maximums est moins intéressante que dans les autres parties, car on dispose en général, en ces points de la poutre, d'un excès de résistance.



Fig. 236.

Résumons comme nous l'avons déjà fait, en nous servant de la fig. 232, les maximums donnés par les différents cas de surcharge que nous désignerons par les lettres *a, b, c, d, e, f* (fig. 236).

Désignation des cas de surcharge	Moments maximums positifs (voir fig. 232)	Moments maximums négatifs
<i>a</i>	entre A et $K_1$ en $K_1$	en $K_1$
<i>b</i>	entre J et $K_2$	en B
<i>c</i>	en $K_2$	en $K_2$
<i>d</i>	en B	en C
<i>e</i>	en J	en J
<i>f</i>	en C	

## CHAPITRE VII — POUTRES CONTINUES

ressort de la construction des tangentes aux points d'in-  
on dans la deuxième travée qu'il y a deux tangentes diffé-  
es, suivant que l'on considère la branche de droite ou celle  
gauche ; il y a par suite un coude en ces points. Dans la  
nière travée au contraire la courbe est continue.

es efforts tranchants maximums sur les appuis sont donnés  
les cas de surcharge  $a, c, e$ .

es tangentes aux extrémités des courbes des efforts tran-  
ts s'obtiennent très facilement ; il suffit de porter sur les  
is de la travée considérée, en tenant compte de leur signe,  
efforts tranchants en ces points, et de mener une droite  
issant les extrémités de ces segments.

ous reproduisons dans la figure 237, les tangentes aux  
émités des courbes ; elles sont désignées par les lettres de  
urcharge correspondante. Connaissant les tangentes aux  
émités des courbes, on les tracera comme des paraboles ;  
courbure est faible et on arrive ainsi à des courbes qui  
rent très peu des courbes vraies.

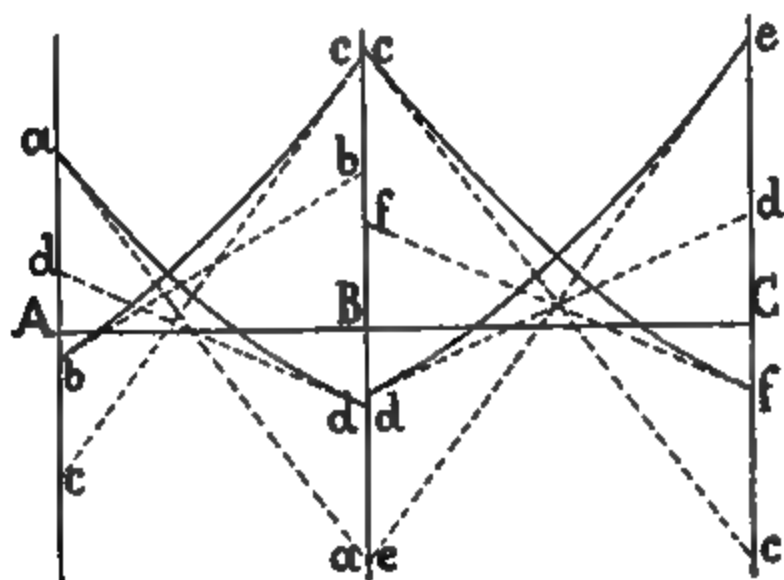


Fig. 237.

omme il est facile de le voir, la méthode approchée est bien  
rapide que la méthode exacte ; elle supprime les charges  
ielles des travées, qui sont la partie la plus compliquée de  
re.

our tracer rapidement les paraboles des moments, on dé-  
e dans du carton deux paraboles correspondant l'une à la

charge permanente, l'autre à la charge totale. Le paramètre des paraboles est égal à  $\frac{H}{p}$ ,  $p$  étant la charge au mètre courant,  $H$  la distance polaire. Ces paraboles servent dans la première et dans la deuxième travée, dans les fig. 4 et 6 de la planche.

### § 3.

#### CALCUL DE RÉSISTANCE DES POUTRES D'UN TABLIER CONTINU PENDANT SON LANÇAGE.

Un des principaux avantages des ponts à poutres continues, c'est de pouvoir se mettre en place par lancement. Il se développe dans les poutres, pendant cette opération, des efforts qui diffèrent de ceux que produisent les charges après l'achèvement du pont, et ces efforts nécessitent souvent des renforcements.

Ce sont les efforts engendrés dans une poutre pendant le lancement d'un tablier que nous allons examiner dans ce paragraphe. <sup>1</sup>

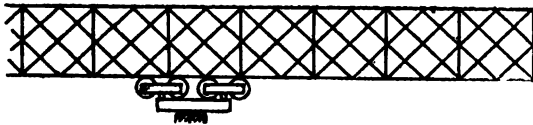


Fig. 238.

**Membrures.** — Les membrures ont à résister à la flexion ; celles du haut de la poutre sont moins fatiguées que celles du bas, car elles ne résistent qu'à la flexion générale tandis que les dernières résistent à la fois à la flexion générale et à la

1. On admet que pendant le lancement, qui dure très peu de temps, le coefficient de travail du métal peut dépasser la limite de 6 kilog. par millimètre carré, généralement admise. On se trouvera dans de bonnes conditions de résistance en admettant 8 kilog. pour le coefficient des membrures sous la flexion générale et pour les barres de treillis, et en élevant ce coefficient à une limite de 12 kilog. lorsqu'on tient compte de la flexion locale dans les membrures.

## CHAPITRE VII — POUTRES CONTINUES

ion locale, produite par le passage d'un galet, entre deux  
ids ou attaches des barres de treillis.

*treillis.* — Les barres de treillis ont à résister à l'effort tran-  
at et de plus, lorsqu'une attache de barres de treillis vient  
asser sur un galet, l'ensemble des barres intéressées en  
e attache résiste à la réaction de l'appui.

a flexion locale des membrures inférieures et les efforts en-  
trés dans les barres de treillis par la réaction, sont souvent  
considérables, et l'on est conduit à diviser cette réaction  
répartissant également entre plusieurs points de la poutre  
noyen de plusieurs galets (voir fig. 238).

'une manière générale, on peut dire que c'est à leur pas-  
sur un appui que les efforts les plus grands se dévelop-  
, aussi bien dans les membrures que dans les treillis. Les  
ments fléchissants et les efforts tranchants atteignent leur  
imum dans la partie en porte-à-faux, au moment où la  
re franchit la plus grande travée. Lorsque toutes les travées  
égales, comme dans la fig. 239, le sommet A de la courbe  
moments, pendant le lançage, correspond à la partie ren-  
se par les semelles supplémentaires au droit d'un appui sur

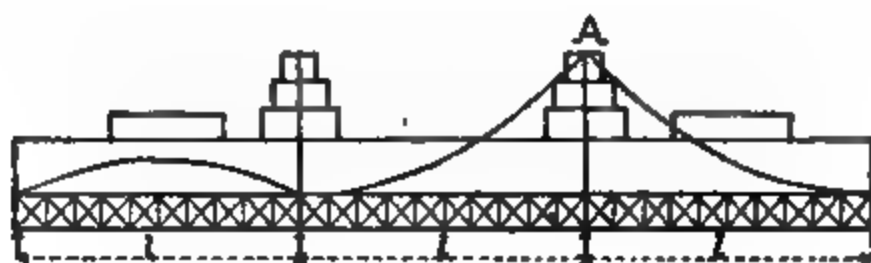


Fig. 239.

et il suffit, en général, de prolonger un peu ces semelles en  
du lançage. Dans le cas très fréquent, où les travées de rive  
plus petites que les travées centrales, le point A, sommet  
la courbe des moments, tombe à gauche de l'appui sur pile  
une partie faible, et les renforcements sont plus impor-  
; il est alors très-souvent préférable, pour de grandes  
es, de munir le tablier d'un avant-bec ayant pour longueur  
fférence entre une travée centrale et la travée de rive, et de  
ener ainsi le point A dans la partie renforcée.

*galets de lançage.* — Les galets de lançage, sur lesquels rou-

lent les poutres, sont portés par des appareils qui assurent une égale répartition des charges entre eux ; les plus simples et les plus employés sont les appareils à balancier de la maison Eiffel (fig. 7, pl. 21). Le nombre des galets est en général de 2 ou de 4.

*Moments fléchissants.* — Dans une poutre à deux travées, les moments fléchissants se déterminent sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la théorie de l'élasticité ; le moment sur pile dépend uniquement de la partie en porte-à-faux ; il est égal à :

$$M = \frac{pl^2}{2}$$

$p$  étant la charge au mètre courant et  $l$  la longueur du porte-à-faux. Au moyen du moment sur pile, il est facile de tracer les courbes représentatives des moments fléchissants sur toute la longueur de la poutre. <sup>1</sup>

Dès que le nombre des travées à franchir est supérieur à deux, les moments sur piles, à l'exception toujours de celui qui correspond au porte-à-faux, se déterminent au moyen de la théorie de l'élasticité, par la méthode de Mohr.

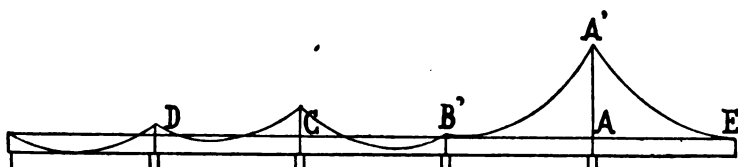


Fig. 240.

Les seules parties de la poutre où les moments sont, en général, plus grands que les moments dus aux charges, sont les parties voisines du point A, dernier point d'appui de la poutre au moment du plus grand porte-à-faux (fig. 240). Il suffit par conséquent, pour le calcul de la poutre, de connaître les moments sur les piles A et B, et de tracer la courbe B'A'E des

1. Il suffit de construire les courbes des moments, ou polygones funiculaires, comme si la poutre était coupée sur les appuis, et de tracer, au moyen des moments sur piles, la ligne de fermeture du polygone funiculaire, comme cela est fait page 26.



moments sur la partie B'E. Le moment sur la pile B est presque nul, celui de la pile C a une valeur comprise entre le moment en A et le moment en B. Le moment en D a une valeur moyenne entre les moments en B et en C, et ainsi de suite.

Sur la culée, on supposera que le moment est nul ; il n'en est pas toujours ainsi, parce qu'une certaine longueur de tablier s'appuie sur la culée, mais cette hypothèse simplifie les calculs sans modifier sensiblement les moments sur la pile B.

C'est une même courbe B'A'E qui donne tous les maximums des moments négatifs dans les parties voisines de l'appui A ; et comme cette courbe passe très près du point B, il sera permis, si l'on veut se contenter d'un calcul rapide et approximatif, d'admettre que le moment sur la pile B est nul.

Nous verrons dans l'exemple qui va suivre, Pl. 24, de quelle manière on peut, avec les lignes d'inflexion, déterminer exactement les moments sur piles.

*Efforts tranchants et réactions.* — Les efforts tranchants se déterminent dans le polygone des forces, comme nous l'avons déjà vu, page 27, en menant une parallèle à la ligne de fermeture du polygone funiculaire. La réaction sur appui n'est autre chose que la somme des deux efforts tranchants de gauche et de droite sur l'appui.

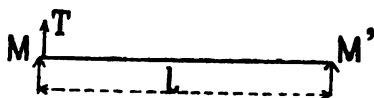


Fig. 241.

L'expression analytique de l'effort tranchant sur un appui est :

$$T = \frac{pl}{2} + \frac{M' - M}{l}$$

$p$  étant le poids au mètre courant,  $l$  la portée de la travée,  $M$  le moment sur l'appui considéré et  $M'$  le moment sur l'appui opposé, pris tous les deux en tenant compte du signe qui est en général négatif. Il n'est pas nécessaire de calculer les réactions en tous les points de la poutre, mais seulement celles qui cor-

respondent aux points faibles, comme ceux où les sections des barres de treillis changent (voir les points 1 et 2, fig. 1, pl. 21) Les réactions calculées pourront servir à tracer une courbe représentative des réactions.

Enfin, lorsqu'il y a un grand nombre de travées égales, on peut se demander sur laquelle de ces travées le lançage donnera les efforts maximums. Les épures montrent que les efforts changent très peu d'une travée à l'autre, et qu'il suffit de faire l'épure pour l'une quelconque de ces travées ; on choisira de préférence la troisième.<sup>1</sup>

#### § 4.

### EXEMPLE DE CALCUL DE LA RESISTANCE D'UNE POUTRE A TREILLIS PENDANT SON LANÇAGE

(Planche 21)

La travée de rive a 36 m. et les travées suivantes ont 40 m. La charge de la poutre est de 750 k. par mètre courant dans toutes ses parties, à l'exception des 40 m. à l'avant qui ne pèsent que 650 k. ; ces 40 m. ont été soulagés, comme on le fait souvent, par la suppression des pièces accessoires (longerons et pièces de pont).

Dans la fig. 1, la poutre est représentée avec son plus grand porte-à-faux de 40 m. Le moment sur la pile 2 est égal à :

$$M = \frac{650 \times 40^2}{2} = 520.000$$

Dans les travées I et II on a tracé les paraboles des moments fléchissants correspondant à la charge de 750 k. et ayant les flèches  $f_1$  et  $f_2$ .

1. La seconde travée se trouve dans des conditions un peu spéciales, parce qu'elle est précédée de la première, qui est plus petite ; c'est pourquoi il est préférable de considérer la troisième, comme cela est fait Pl. 21.

## CHAPITRE VII — POUTRES CONTINUES

ns construit (fig. 2) la ligne d'inflexion de gauche  
ième travée ; c'est la seule ligne d'inflexion néces-  
la fig. 3 les lignes en croix ont été tracées, comme  
iqué à la page 351. Les moments sur la pile 1 ont  
ts pour trois positions différentes du tablier, corres-  
0 m., à 28 m. et à 40 m. de porte-à-faux. La troi-  
on donne les moments maximums, et les deux pre-  
efforts maximums dans les barres de treillis de la  
le la troisième série.

ents sur la pile 1 se déterminent de la manière  
our la troisième position par exemple : on cons-  
le point J en partant du point A', sachant que AA'

$$= \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2.$$

CC', égal au moment sur la pile 2 et C<sub>2</sub>'C'', égal à  
fig. 3. La ligne C<sub>2</sub>'J coupe sur la verticale de l'ap-  
ment sur pile BB<sub>2</sub>.

uction des moments sur pile est la même pour les  
cas, avec cette seule différence cependant, à cause  
de la travée II non complètement chargée, qu'au-  
urer les segments totaux entre les lignes en croix,  
comme cela est fait page 358, les portions de seg-  
ont à considérer. Les traits pointillés, fig. 3, déter-  
segments correspondant à la première et à la deu-  
ion.

tracée en trait plein (fig. 4) correspond au cas nu-  
est tracée au moyen de paraboles et des moments  
n aucun point elle ne sort de la ligne des moments  
se construite à 8 k. par millimètre carré.

uction des efforts tranchants ne présente aucune  
ous ne l'avons faite dans l'épure que pour le troi-  
ui donne les efforts maximums dans les barres les  
voir les polygones des forces ayant pour pôles O<sub>n</sub>  
éaction est égale à :

$$26.000 + 28.000 = 54.000 \text{ k.}$$

n le voit dans la planche, ce moment est nul dans le cas qu  
e point B<sub>2</sub> tombant sur le point B.

§ 4 — RÉSISTANCE PENDANT LE LANÇAGE — EXEMPLE 387

Cette réaction, décomposée suivant les deux barres de treillis, donne dans chacune d'elle (fig. 6) un effort de 38.000 k. et un coefficient de travail de  $\frac{38.000}{6.710} = 5$  k. 6 par millimètre carré.

On calculerait de la même manière les efforts dans les autres types de barres ; toutefois il est à remarquer que le polygone

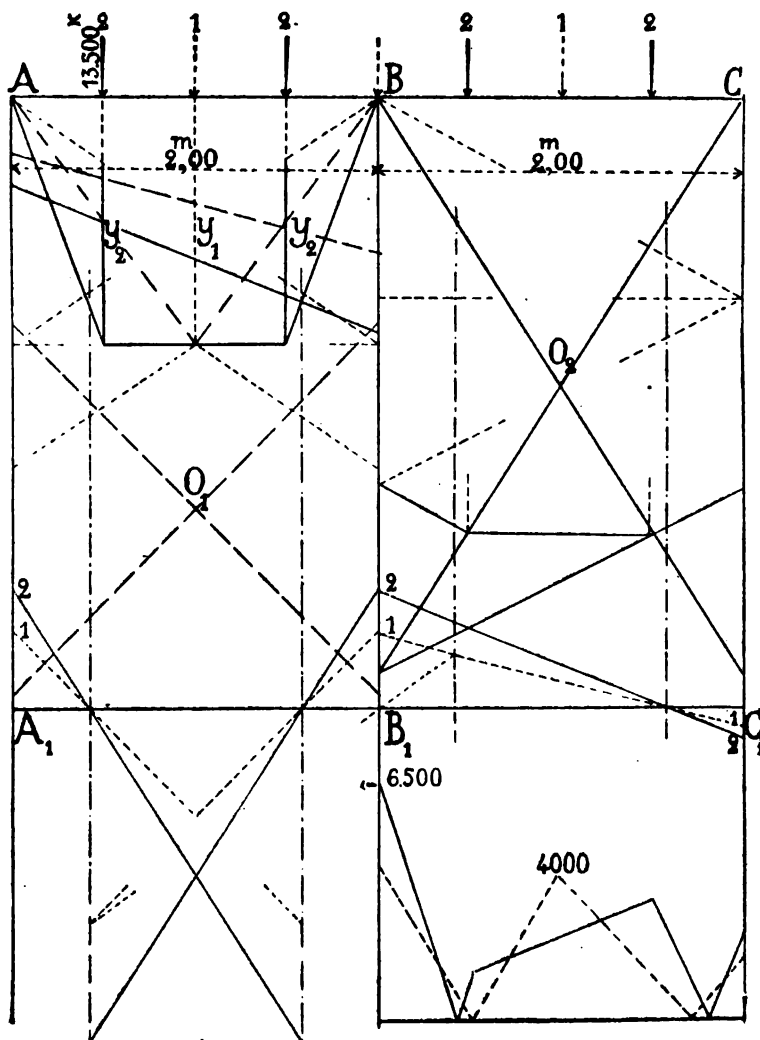


Fig. 242.

des forces de la travée II n'est pas le même pour toutes les positions du tablier, les charges étant de 750 k. sur une partie de la travée et de 650 k. sur l'autre.

*Flexion locale.* — Il reste à examiner quelle est l'augmentation du coefficient de travail de la membrure inférieure sous l'influence de la flexion locale. Pour faire le calcul complet, il y a à considérer tous les points faibles, c'est-à-dire tous ceux qui précèdent un renforcement par une semelle supplémentaire, tels que le point F (fig. 1 de la planche). De plus le point 3 sur pile, où la réaction atteint son maximum, est aussi à considérer. Nous ne ferons le calcul que pour ce dernier point.

Les appareils de lançage sont représentés, fig. 7. La distance des galets est de 1 m., celle de deux points d'appui consécutifs de la membrure de 2 m. Ces points d'appui se trouvent d'une part à l'attache des barres de treillis et d'autre part aux montants qui réunissent la membrure inférieure aux croisements des barres.

La réaction maxima sur un galet est de :

$$\frac{54.000}{4} = 13.500 \text{ k.}$$

Nous supposerons un nombre infini de travées de 2 m., et nous considérerons deux de ces travées dans la fig. 242.

La position des lignes d'inflexion pour un nombre infini de travées égales est connue ; ces lignes sont à une distance 0,21.7 des appuis.

Considérons deux positions des galets donnant approximativement les moments maximums : la position 1 pour le moment fléchissant positif, et la position 2 pour le moment maximum négatif.

Les lignes en croix  $O_1$  et  $O_2$  ont été construites comme cela est indiqué à la page 354 pour des charges isolées ; la construction n'est faite que pour une travée, on obtient ainsi les lignes en croix  $O_1$  pour la première position et  $O_2$  pour la seconde. Ce qui se rapporte à la première position est tracé en pointillé, ce qui se rapporte à la deuxième en traits pleins ; une partie des constructions ont été faites dans la deuxième travée pour ne pas compliquer la première.

Les moments sur appuis ont été construits au-dessus de la ligne horizontale  $A_1B_1C_1$  pour les trois appuis, en tenant compte des charges de la première travée. Pour tenir compte de celles de la deuxième, qui sont symétriques, il suffit de doubler le moment sur l'appui B et de retrancher le moment en C de celui en A. Au bas de la figure, on a tracé au moyen des moments sur piles les lignes des moments et l'on trouve :

6.500 pour le moment négatif,  
4.000 pour le moment positif.

Les coefficients de travail correspondants, dans la membrure, seront :

$$\frac{6.500}{898} = 7^k,2 \text{ dans la fibre supérieure}$$

$$\frac{4.000}{3.360} = 1^k,2 \text{ dans la fibre inférieure.}$$

Ces coefficients s'ajoutent à celui qui est dû à la flexion générale.

## § 5

### DÉFORMATION D'UNE POUTRE PENDANT LE LANÇAGE

(Planche 22).

Nous avons vu comment on peut construire la déformation d'une poutre droite quelconque, page 147, et l'exemple de la planche 8 se rapporte à une poutre continue. Il peut être intéressant de déterminer aussi les déformations d'une poutre pendant le lançage. La flèche à l'extrémité du porte-à-faux est, en général, très importante ; elle dépasse souvent 500<sup>mm</sup>. Dans le plus grand nombre de cas, on relève l'extrémité des poutres dès qu'elles arrivent sur une pile, de manière à ramener cet appui au niveau des autres. Lorsque le tablier est

## CHAPITRE VII — POL

. avant-bec très léger,  
pour résister à la réaction  
pour le relever complètement la quantité dont  
que des efforts proportionnels  
manière plus générale  
oins l'extrémité des piles  
des efforts, et les amène  
is avantageuse.

ulant d'une part la réaction  
exerce sur la pile considérée  
ême niveau, et en déterminant  
i-faux correspondant à  
nts nécessaires pour ces  
es réactions qui correspondent  
élévation.

ormations se déterminent  
tres exemples, par un  
ns les déformations des  
ence sur les déformations  
présentons dans la planche  
. 21 (fig. 4). Les polygones  
cer les courbes des moments  
le droite, celui de la figure  
se trouve sur une horizontale  
de la ligne des forces.  
la ligne A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> menée  
a position du point A<sub>1</sub>  
ans notre cas particulier  
près nul et le point A<sub>1</sub> est

ace des moments a été  
second polygone des forces  
x surfaces des éléments  
Avec une distance polaire  
re des forces, en prenant  
quelconque de la verticale

manière à obtenir les déformations en demi-gran-

le des longueurs est de  $\frac{1}{500}$ , celle des surfaces, celle des EI de  $\frac{1}{25.000.000.000}$ ; l'échelle des déformations déduite des précédentes, elle est de

$$\frac{25.000.000.000}{100.000.000 \times 500} = \frac{1}{2}.$$

xième polygone funiculaire, tracé avec le polygone de la fig. 2, représente la ligne élastique.

ne la ligne A<sub>1</sub> B<sub>1</sub> C<sub>1</sub> par les deux points A<sub>1</sub> et B<sub>1</sub> de la ligne élastique avec les verticales des appuis. Tirer de cette ligne que les déplacements verticaux se

he à l'extrémité de la poutre est de 220 milli-

## § 6

### MONTAGE EN PORTE-A-FAUX

de lancer les tabliers droits à poutres continues, on quelquefois en porte-à-faux. Le montage en porte-pent commencer que lorsqu'une travée au moins a en place sur échafaudage ou par tout autre moyen. me ensuite le montage en porte-à-faux, en se servant de la partie montée pour avancer les appareillage destinés à mettre les pièces en place (voir



Fig. 243.

stance du tablier dans ce cas se vérifie de la même que dans le cas d'un lançage, mais avec de grandes

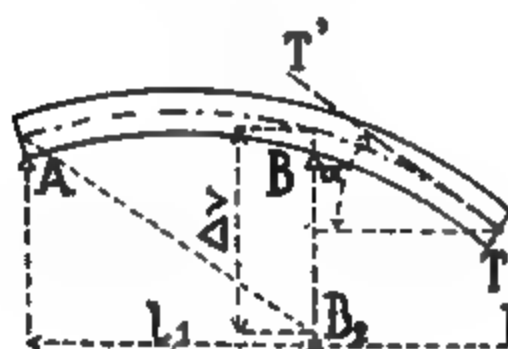


simplifications. Il n'y a qu'un à considérer pour chacune des travées à-faux, il donne à la fois dans les moments et les efforts tranchants la réaction des membrures disparaît.



Fig

Le montage en porte-à-faux des deux rives à la fois et en la travée centrale. On diminue les efforts dans les poutres en rives à-faux (fig. 244). Ce dernier montage est employé que très rarement ; pour des tabliers à trois travées considérables.



Fig

L'étude des déformations a tout spécialement. Pour que les poutres soient dans les conditions habituelles de montage dans les conditions habituelles, il est nécessaire que les appuis soient fermement se fait, des niveaux doivent être déterminés.

Nous avons représenté, dans la figure, le tablier déformé. Au moment de la fermeture, les moments aux extrémités  $TT'$  et  $T, T'$ , aux extrémités vont se confondre. Il faut, à

D et ramener les tabliers dans la position représentée fig. 246.

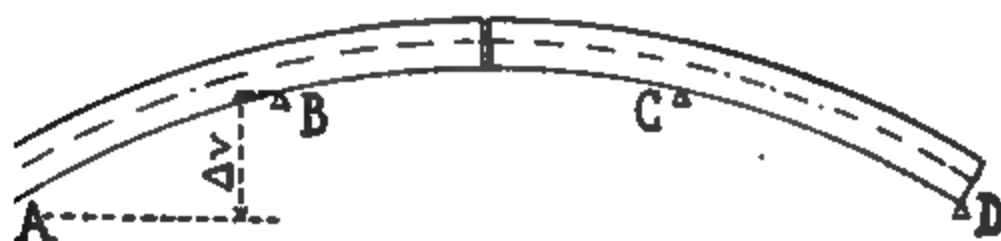


Fig. 246.

différence de hauteur  $\Delta v$  qu'il faudra donner entre les supports A et B ou C et D se déterminera au moyen de la ligne tangente. Si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle de la tangente extrême libre moyenne avec l'horizontale, fig. 245, par  $l_1$  la portée de la première travée, par  $l_2$  celle de la travée centrale, la rotation qu'il faut opérer autour du point B est précisément égale à  $\alpha$ . Puisque l'angle  $\alpha$  est toujours très petit, on pourra :

$$\Delta v = l_1 \operatorname{tg} \alpha$$

pour trouver la différence de niveau des appuis. Il suffit, pour trouver  $\Delta v$ , de mener la ligne AB, parallèle à la tangente (fig. 245 et fig. 246).

## § 7

### DESCENTE D'UN TABLIER SUR SES APPUIS

Le lancement d'un tablier métallique se fait en général à un niveau supérieur au niveau définitif. La hauteur des appareils de lancement est plus grande que celle des appuis du tablier, et c'est ce qui oblige à relever ce dernier pendant le lancement. Ce n'est que lorsque le tablier est en place qu'on le descend sur ses appuis définitifs. On abaisse à cet effet successivement les appuis d'une petite quantité. L'abaissement que l'on fait à un appui sans toucher aux autres, dépend de la résistance et de l'élasticité du tablier ; en abaissant un appui, on

## E VI

ents  
avec  
et a  
les j  
nité  
e tr  
de  
té s  
ague  
dans  
ser  
our

## CHAPITRE HUITIÈME

---

### DES POUTRES DE PONTS TOURNANTS

*ournant double*

*de de calcul d'un pont tournant double (Planche 23)*

*ournant à double volée*

*ournant à volée simple. (Planche 24)*



## CHAPITRE HUITIÈME

### CALCUL DES POUTRES DES PONTS TOURNANTS

Le calcul des poutres des ponts tournants peut se ramener à celui des poutres en porte-à-faux et des poutres continues ; mais cependant quelques points particuliers nécessitent des calculs spéciaux, par exemple les déplacements verticaux qu'on opère pour caler les poutres et les contrepoids qui assurent la stabilité pendant la manœuvre du pont.

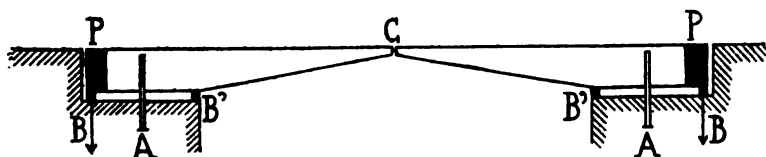


Fig. 247.

Les types de ponts tournants qu'on rencontre le plus fréquemment sont représentés en diagrammes dans les fig. 247, 248 et 249.

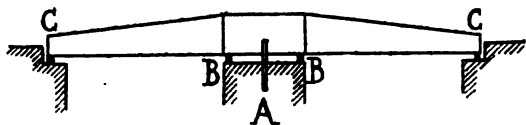


Fig. 248.

Le type de la fig. 247 est un pont tournant à une seule travée, qui s'ouvre par moitié sur les deux rives. Un contrepoids équilibre chacune des deux volées.

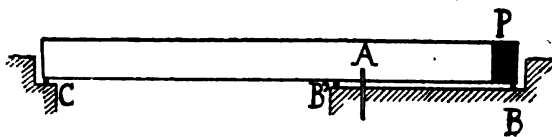


Fig. 249.

Le type de la fig. 248, à double  
nt en général égales et dont l'un  
Enfin la fig. 249 représente un  
lée franchissant toute la travée.  
Nous examinerons successivem

## § 1

## PONT TOURNANT

Dans le premier type, les deu  
tour d'un pivot A; elles sont éq  
Lorsque le pont est fermé, on  
nt au point C, au moyen d'un  
ne, et l'on cale les poutres aux  
int C ne peut établir la continui  
is transmettre une partie de la  
argée à l'autre.

Chaque fois que les deux côtés  
nière, tout se passera comme s.  
Pour déterminer les efforts max  
érer plusieurs cas de surchar  
celui de l'une seulement. Le pr  
ents fléchissants et les efforts t  
voisinage des appuis, le second  
stances, engendrer des efforts  
chissants maximums aux enviro  
n chargée.

Dans la première hypothèse, on  
is appuis avec porte-à-faux et  
is la seconde hypothèse, l'étude  
héorie de l'élasticité permet de  
t que la volée chargée exerce au  
endant, comme nous le verrons

vre, on peut facilement déterminer cet effort d'une manière approximative.

*Contrepoids.* — Le contrepoids peut être calculé, soit pour équilibrer la charge permanente seule pendant que le pont tourne sur les pivots A, soit aussi pour équilibrer la surcharge placée entre les points B' et C; dans le premier cas, si le contrepoids nécessité par la surcharge est supérieur à celui de la charge permanente, l'excès de contrepoids nécessaire est remplacé par un ancrage au point B.

Le contre-poids équivalant à la charge permanente est calculé de manière à faire passer la résultante de toutes les charges au point A ou entre A et B.

Le contrepoids équivalant à la surcharge se détermine par la condition que la résultante des charges passe au point B' ou entre les points B et B'.

Si l'on admet que le poids propre du pont est uniformément réparti sur toute sa longueur, et égal à  $p_p$  par mètre courant, le contrepoids de la charge permanente est égal à

$$P = \frac{p_p l \left( \frac{l}{2} - a \right)}{\left( a - \frac{d}{2} \right)} \quad (1)$$

où  $l$ ,  $a$  et  $d$  représentent les longueurs indiquées dans la figure 250.

Le contrepoids équivalant à la charge totale  $p_t$ , comprenant la charge permanente  $p_p$  et la surcharge  $p_s$ , est égal à

$$P' = \frac{p_p l \left( \frac{l}{2} - c \right) + p_s \frac{l_1}{2}}{\left( c - \frac{d}{2} \right)} \quad (2)$$

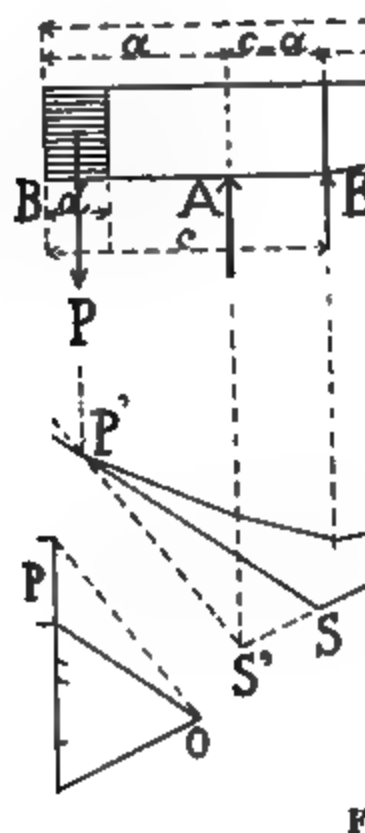
Si la charge n'est pas uniformément répartie, on tracera avec un polygone des forces le polygone funiculaire correspondant aux charges. Les côtés extrêmes prolongés donneront le point de passage S de la résultante.

Pour faire tomber ce point S sur la verticale du point A et établir l'équilibre, on tracera la ligne SP', puis on mènera par



le pôle  $O$  du polygone des forces tiendra ainsi sur la verticale saire  $P$ .

On peut, pour le tracé du pour réduire au minimum le



### EXEMPLE DE CALCUL D'U

(l'la

L'une des volées d'un pont dans la planche 23, ses dimensions sont :  
 Longueur totale,  $l = 30\text{ m}$ ,  
 Distance du pivot aux extrémités,  $a = 8\text{ m}$ ,  
 Longueur du contrepoids,  $b = 2\text{ m}$ ,  
 Le calage  $B'$  se fait à  $2\text{ m}, 06$  à  $8\text{ m}, 00$  à l'arrière.

es charges au mètre courant sont de  $1.500^k$  pour le poids propre et de  $800^k$  pour la surcharge, donnant une charge totale de  $2.300^k$  par mètre courant de poutre.  
On fait dans les formules (1) et (2) :

$$p_p = 1.500^k, \quad p_s = 800^k, \quad l = 30,00 \quad a = 8,00 \quad d = 2,00 \\ c = 10,00, \quad l_1 = 20,00$$

On trouve :

Contrepoids de la charge permanente :  $P = 45.000^k$ .

Contrepoids de la surcharge :  $P' = 43.000^k$ .

La surcharge ne nécessite donc pas un supplément de contrepoids. S'il en était autrement, on pourrait, comme nous avons dit, soit augmenter le contrepoids, soit amarrer le tablier sous le contrepoids.

Le calcul d'une poutre de pont tournant comprend la recherche des charges défavorables et le calcul des forces extérieures et des efforts intérieurs. La poutre étant à treillis, les efforts intérieurs se détermineront par l'une des trois méthodes du Chapitre III, § 1, page 83, dès que l'on connaîtra les charges extérieures. On aura soin de considérer toujours la charge défavorable de la pièce que l'on examine.

Nous allons étudier d'abord une volée isolée, puis rechercher l'influence d'une volée sur l'autre.

La poutre peut se diviser en trois parties : La première, qui se trouve toujours en porte-à-faux ; les autres, AB' et A'B, qui ne sont en porte-à-faux que pendant la manœuvre du pont.

La poutre est portée en un seul point A pendant la manœuvre et en trois points A, B, B' lorsqu'elle est fixe.

Dans le cas particulier où l'on disposerait d'un appareil hydraulique, permettant de soulever le pont avant de le caler, les poutres ne reposeraient en temps ordinaire qu'en deux points B et B' ; les calculs se trouveraient alors simplifiés.

Il va sans dire qu'en pratique, il y a un guidage, une couronne de galets ou tout autre système qui assure l'équilibre, dans le cas où la résultante des charges ne passe pas exactement sur le pivot.



## CALCUL D'UN PONT TOURNAI

cas : tout le pont est chargé ;  
 prenons comme maximums les  
 dans ces deux hypothèses.

de des forces de la fig. 5 a servir

(I) (II) de la surcharge dans  
 des efforts tranchants cor-  
 même manière (fig. 4).

et le moment sur l'appui B', il  
 outre une section constante d  
 graphiquement, soit analytiq  
 : on a deux travées d'une p  
 es moments sur deux des app  
 et sur l'appui B' où il vient d'

as compliquer l'épure, nous  
 théorème des trois moments

des trois moments étant la  
 :

$$+ 2M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + \frac{1}{2} p_1 l_1^2 +$$

le premier cas de surcharge :

$$= - \frac{M_2 l_2}{2 (l_1 + l_2)} = - \frac{160.000 \times}{2 (2 + 8)}$$

deuxième cas

$$\frac{M_2 l_2}{l_1 + l_2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 (l_1 + l_2)} = 16.000$$

les négatifs sont portés dans  
 de, les moments positifs au-d  
 les sur piles étant connus, on

ge tend à soulever la poutre au po  
 ments trouvés par cette formule so  
 ie à la surcharge soit inférieure à l  
 nte.



correspondant au cas de surcharge N° 1, porte le N° I, et au cas de surcharge N° 2 porte le N° II.

*Effet de la surcharge d'une volée sur l'autre.* — Nous supposons qu'une des volées, lorsqu'elle est chargée, a une influence sur l'autre. Désignons par  $f$  la flèche que prend la volée chargée sur la longueur du porte-à-faux, lorsqu'elle est soutenue par l'autre volée. Cette dernière aura pour sa flèche de moitié la flèche  $f$ , qui ne sera plus ainsi que

la flèche  $f$ , les efforts que la liaison des deux volées exerce sur elles à leurs extrémités sont égaux et de signe contraire ; la volée non chargée devra par suite s'abaisser de moitié, tandis que l'autre se relève.

Il est facile de déterminer l'effort  $P$  qu'une volée exerce sur l'autre, en construisant la flèche  $f$  que prend la volée chargée, puis en la comparant à une force quelconque  $P'$  agissant à l'extrémité du porte-à-faux ; on en déduira la force  $P$  par la

$$P = \frac{P'f}{2f'}.$$

La détermination des flèches se fait facilement par la méthode que nous avons développée page 130 ; nous reviendrons plus tard à ces déformations dans un autre exemple.

On peut aussi déterminer la force  $P$  avec une exactitude suffisante par les considérations suivantes :

Supposons d'abord que la section des poutres soit constante, et que le rapport entre les flèches prises par la volée, pour une charge  $P$  appliquée à son extrémité et pour une charge égale à  $P$  uniformément répartie sur toute la longueur du porte-à-faux,

(Comparer les deux formules page 36.)

soit tel que si l'on désigne par  $p$  la charge uniformément

répartie, on ait :  $P = 2p$ . Ce rapport correspond à des poutres encastrees sur l'appui et il n'est pas difficile de voir que la partie de la flèche due au porte-à-faux ; pour la partie due à la charge répartie entre les points B et B' ce rapport est de 2 qui est peu différent de 1,5 ; on altérera peu les résultats en admettant un rapport uniforme



# — CALCUL D'UN PONT TO

*térieures.* — La déterm  
pas été représentée sur  
is nous l'avons faite po  
— 9', pour le montant 8  
9'. Cette détermination p  
des indiquées à la page 83

maximum dans la membr  
divisant le moment max  
— 9'.

$$\text{Effort (8 — 9)} = \frac{225.000}{4,75} =$$

maximum dans la membr  
divisant le moment au po  
par la distance normale  
9'.

$$\text{Effort (8' — 9')} = \frac{205.000}{2,05} =$$

barre de treillis et le mont  
nante de la surcharge  
jusqu'à son intersection  
F : La résultante des force  
grandeur ; elle est de 22 (   
a position s'obtient dans l  
u côté 8 — 9 du polygone  
effort dans la barre de tr

$$\text{Effort (8 — 9')} = \frac{22.500 \times}{7,40}$$

la distance horizontale d  
ce normale du point F à l  
nière analogue, on trouve  
la charge permanente ég

$$\text{Effort (8 — 8')} = \frac{25.500 \times}{11,5}$$

0 est la force extérieure





## § 3

## PONT TOURNANT A DOUBLE VOLÉE

Le pont tourne sur un pivot A (fig.248) page 397 et les calages se font aux points B et C. Les points B peuvent se confondre avec le point A. Admettons d'abord que les calages aux points B et C se fassent sans exercer de réactions importantes.

L'influence de la charge permanente se détermine en supposant que le pont est en équilibre sur le point A ; l'influence de la surcharge en considérant les poutres comme appuyées aux points C, B, A, B, C sur 5 appuis. Il est à remarquer cependant que l'appui A a très peu d'influence sur la répartition des efforts de la surcharge, parce qu'il est en général très voisin des appuis B ; d'autre part cet appui n'agit pas directement sous les poutres, mais dans l'axe du pont, et les réactions sont transmises aux poutres par des pièces transversales d'une élasticité relativement grande ; il sera donc généralement permis de le négliger et l'on aura une poutre reposant sur 4 appuis.

Dans le cas où l'on dispose d'appareils hydrauliques pour soulever le pont, pour remettre les appuis des poutres de niveau et pour décharger le pivot A, les calculs seront un peu différents. On déterminera d'abord l'influence de la charge permanente pendant la manœuvre, puis on calculera les poutres comme des poutres reposant sur les 4 appuis C, B, B, C aussi bien pour la charge permanente que pour la surcharge, et l'on aura soin de considérer pour chaque pièce le cas le plus défavorable.

Il peut arriver aussi que le pont, au lieu d'être porté par le pivot soit porté par une couronne de galets, le pivot ne servant que de guide ; l'appui A disparaît dans ce cas, et les poutres sont portées pendant la manœuvre en deux points B.

Nous nous contentons d'indiquer la marche à suivre, les calculs pouvant, comme on le voit, se ramener à ceux des poutres en porte-à-faux et des poutres continues.



distance moyenne dans le panneau considéré. Pour les treillis, nous admettrons une inclinaison moyenne correspondant à l'écartement moyen admis pour les membrures.

Nous avons vu au § 11, chapitre III, page 155 que les déformations dues aux membrures s'obtiennent par le tracé d'un polygone funiculaire, avec un polygone des forces dans lequel les forces sont égales à

$$P = \left( \frac{\Delta s R'}{E} + \frac{\Delta s R}{E} \right)$$

où  $\Delta s$  et  $\Delta s'$  sont les longueurs des membrures d'un panneau,  $R$ , et  $R'$  les coefficients de travail de ces membrures,  $E$  le coefficient d'élasticité égal à  $16 \times 10^3$  par  $\text{mm}^2$  pour le fer. La distance polaire est variable et égale à la hauteur moyenne des panneaux.

Nous avons déjà dit que nous avons pris

$$R = R' = \frac{R + R'}{2}$$

Le polygone des forces est représenté dans la figure 3; l'échelle des forces  $P$  est de 10; celle des distances polaires est 10 fois plus grande que celle de la fig. 1.

Le polygone funiculaire  $B, A', C$  de la figure 2 donne les déplacements verticaux en vraie grandeur. Les déplacements sont à mesurer verticalement à partir de la ligne  $B, A', C$ . On obtient ainsi à l'extrémité de la poutre une flèche de  $0^{\text{m}},069$ .

Les constructions ne sont indiquées entièrement que pour l'élément 3; on a pour cet élément :

$$P = \frac{2,4}{16 \times 10^3} \times (2,50 + 2,55) = 0,00076$$

La distance polaire correspondante, égale à la distance moyenne des membrures, est de  $2^{\text{m}},525$ .

Les déformations correspondant aux treillis sont construites dans la figure 4; elles sont représentées dans chaque panneau par l'expression (voir page 149) :



## CHAPITRE

---

## ES DANS L

*nceau à une seul  
nceau à deux bis  
■ de portée. Plai  
illis simple avec  
eillis. Planche  
illis double de 2.  
e à trois articul  
e à deux articul*



## CHAPITRE NEUVIÈME

### FERMES DANS LES CHARPENTES

Les règles de calcul des fermes de charpente sont plus simples que celles des poutres de pont. Elles sont en réalité que des poutres hyperboliques, appropriées à un cas spécial. La règle des fermes est donnée en général plus simple que la ligne intérieure dépendant de la charge.

Le calcul des fermes est plus simple que celui des poutres de pont, car les charges défavorables, qui compliquent le calcul, disparaissent presque en effet de quelle manière une charpente est chargée à deux cas seulement : celle qui est chargée par une couche constante, et celle où un seul côté est chargé, le vent a balayé l'autre, soit encore la neige disparaît plus vite la neige de l'autre côté, il n'agit que d'un cas comme suit les cas de surcharge des fermes.

*1. uniformément répartie sur toute la surface ;*

*2. uniformément répartie sur la face*

*chargée sur l'une des faces.*

Les valeurs numériques des charges et des moments à entrer dans les calculs, nous les donnerons dans le chapitre 8.









## 1 — FERME POLONCEAU A UNE SEULE B

Efforts correspondants, sont tracés en traits pleins, ceux travaillant à l'extension en traits sinueux. Au sens des efforts, nous avons indiqué par des flèches on le détermine.

En partant de F, par exemple, il y a 4 efforts; le surlent, on met dans le polygone des forces représentatives dans un même sens pour le faire équilibrer. On reporte les flèches, celles qui s'éloignent du point F indiquent que celles qui s'en approchent désignent

Pour la ferme Polonceau on sait d'avance que la poutre *d* et la bielle *c* sont comprimés par les autres, toutes les autres pièces sont tendues, et les efforts sont à peine nécessaires.

Les efforts déterminés dans la fig. 1 ont été multipliés par 4 pour 1000<sup>k</sup>, et ils ont été tracés dans la fig. 2.

— Les efforts intérieurs dus au vent se calculent par la même méthode, dès que l'on connaît la direction du vent.

Les points d'action sont les points I et II, le

projeté de la toiture sur la direction perpendiculaire au vent à 5<sup>m</sup>,5 de hauteur. L'effort total sur une ferme sera de

$$110 \times 5 \times 5,5 = 3.025^k$$

se répartit de la manière suivante :

1.512<sup>k</sup> au point I

962 en chacun des points II et O.

Nous laisserons de côté l'effort O qui agit dir

Les efforts du vent sont à décomposer en un effort normal et un effort parallèle. C'est l'effort normal qui est obtenu (fig. 3) par une décomposition au point II est la moitié de l'effort I. L



comme pour une poutre continue reposant sur les appuis O, N, J, L, O, ou, avec une approximation suffisante, en supposant l'arbalétrier *b* libre en O et encastré en N, et l'arbalétrier *d* encastré à ses deux extrémités.

## § 2.

## FERME POLONCEAU A DEUX BIELLES

(Planche 25, fig. 5, 6 et 7).

*Données.* — La ferme est représentée dans la fig. 5 de la planche 25. Sa portée est de 30<sup>m</sup>,00 ; l'écartement des fermes est de 6<sup>m</sup>,00. La distance des pannes de  $\frac{30}{16} = 1^m,875$ .

Les charges sont les suivantes, par mètre carré de projection horizontale.

Métal.....	40 <sup>k</sup>	} 76 <sup>k</sup>
Couverture en zinc.....	36	
Surcharge.....	50 <sup>k</sup>	

Nous ne déterminerons pas, dans cet exemple, les efforts engendrés par le vent, parce que l'épure serait semblable à celle du cas précédent, mais nous examinerons le cas où une moitié de la ferme seulement serait chargée.

Les charges des pannes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 n'entrent pas dans l'épure ; elles soumettent l'arbalétrier à la flexion et ce dernier reporte ces charges aux points I, II, III, IV, etc.

L'épure est faite pour la charge permanente ; les efforts dus à la surcharge totale s'obtiennent par une simple proportion.

*Charge permanente.* — Nous faisons agir toute la charge permanente aux points I, II, III, etc., et l'on a en chacun de ces points un poids de :

$$76 \times 6 \times 1,875 \times 2 = 1.710^k.$$

Comme dans le cas précédent, l'épure a été faite pour une demi-ferme seulement, à cause de la symétrie des charges. On s'est servi d'un polygone de Cremona (fig. 6).



Les réactions sont déterminées par le moyen d'un polygone funiculaire UV, tracé au moyen du pôle O'. La ligne O'T, parallèle à UV, détermine sur la verticale des forces les deux réactions  $T_a$  et  $T_b$ . Celles-ci étant connues, on procède comme dans le cas précédent ; mais en faisant la construction pour la ferme complète. Les efforts dans les pièces  $l', i', g', e', c'$  du côté qui n'est pas chargé, sont nuls.

*Efforts totaux.*— Les efforts dans toutes les pièces sont résumés dans le tableau suivant, pour la charge permanente et la surcharge ; en les additionnant on a obtenu les efforts totaux.

Les efforts de flexion dans les arbalétriers, engendrés par les pannes situées entre deux nœuds, ne sont pas considérés ; ils se détermineraient comme nous l'avons indiqué dans l'exemple qui précède.

**Efforts dus aux charges**

Désignation des pièces	Efforts dus à la charge permanente	Efforts dus à la surcharge totale	Efforts dus à la demi-surcharge		Efforts maximaux totaux
			Côté chargé	Côté libre	
a	+ 16.400	+ 10.800	+ 7.800	+ 3.000	+ 27.200
b	— 17.600	— 11.600	— 8.400	— 3.200	— 29.200
c	— 1.500	— 980	— 980	0	— 2.480
d	— 17.000	— 11.200	— 8.000	— 3.200	— 28.200
e	+ 2.100	+ 1.380	+ 1.380	0	+ 3.480
f	+ 14.200	+ 9.400	+ 6.400	+ 3.000	+ 23.600
g	— 3.100	— 2.000	— 2.000	0	— 5.100
h	— 16.500	— 10.900	— 7.700	— 3.200	— 27.400
i	+ 2.100	+ 1.380	+ 1.380	0	+ 3.480
j	+ 5.600	+ 3.700	+ 3.400	+ 300	+ 9.300
k	+ 8.900	+ 5.850	+ 2.925	+ 2.925	+ 14.750
l	— 1.500	— 980	— 980	0	— 2.480
m	— 15.800	— 10.400	— 7.200	— 3.200	— 26.200
n	+ 7.700	+ 5.100	+ 4.800	+ 300	+ 12.800

Les efforts de tension sont désignés par le signe +, les efforts de compression par le signe —.

En additionnant, pour une même pièce, les efforts trouvés dans le cas de la demi-surcharge du côté chargé et du côté libre, on doit retrouver l'effort dû à la surcharge totale.





- FERME A TREILLIS SIMPLE AVEC MARQUISE

igne négatif. Dans les fig. 8 et 9, les effort  
primées sont indiquées par un double trait.

Désignation de la pièce	Effort dans la pièce
a	1.100k
b	1.000
c	100
d	750
e	350

§ 4

E A TREILLIS SIMPLE AVEC MARQUIS

(Planche 26, fig. 1).

1. —

tée de la ferme d'axe en axe des appuis....	10m,0
te-à-faux des marquises.....	2,87
rtement des fermes.....	4,00

, au mètre carré de projection horizontale :

tal.....	36k
verture en tuiles .....	50
charge .....	50
Charge totale.....	136k

rts sont concentrés aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, '  
ométriques. La charge en chacun de ces points

$136 \times 4 \times 1,25 = 680k.$

tion sur un appui est la somme des efforts 1 à  
le l'effort 7.

orts intérieurs dans la ferme sont déterminés  
des forces (fig. 2), où les charges verticales  
unes à la suite des autres. A cet effet, on co



## § 5 — CONSOLE A TREILLIS

### § 5

## CONSOLE A TREILLIS

(Planche 26, fig. 3).

La console à treillis de la fig. 3, pl. 26, a  
elle est distante des consoles voisines de 5<sup>m</sup>,  
Les charges au mètre carré de projection

Métal.....	
Couverture .....	
Surcharge.....	
Total.....	-

Les charges sont concentrées aux points  
de 1<sup>m</sup>,00. Au point 1 la charge est de  $5 \times 0$ ,  
points 2, 3, 4, elle est de  $5 \times 1 \times 87 = 435$

La partie extrême de la console est à par  
extérieure qui doit servir à déterminer les el  
mières pièces *a*, *b*, *c* est la résultante *R* des  
position de cette résultante se détermine au  
gone funiculaire CDE, tracé avec un pôle *O*  
extérieure *R* se décompose par la méthode d  
les trois pièces *a*, *b*, *c*. A cet effet, on décomp  
*R* suivant la direction *c* et suivant la ligne  
l'intersection *B* des pièces *b* et *a*. Cette der  
se décompose à son tour suivant les pièces  
premiers efforts étant connus, on continue  
autres par la méthode de Cremona, en consi  
ment les nœuds *C*, *D*, *E*, *F*. La résultant  
donne la traction sur les maçonneries au  
donne la compression au point *H*.



TREILL

ous avo  
la moi  
g. 7 cet  
. La m  
e voir d  
. Dans  
A, B, C,  
, C', B'  
s le pre  
que dar

on de l'  
ux figu  
onséque

marques  
miner le  
ont été  
donc p  
yen de  
n (voir  
nt sou  
ns la fi  
rrespor  
ns les a  
é.  
-dessou

pièce m  
pièce o  
pièce l  
pièce n  
pièce n'

sion so  
ion pa



OA. La distance du sommet A du polygone (qui n'est tracé que pour une moitié de la ferme) à l'horizontale des appuis  $OO_1$ , est inversement proportionnelle à la distance polaire. Nous avons eu soin de porter les forces sur la verticale du point S et de placer le pôle  $O'$  sur la ligne  $OO_1$ ; en menant la ligne  $AO''$  parallèle à  $SO'$ , on obtient le pôle  $O''$  correspondant à la ligne de pression. Cette ligne de pression a été tracée en trait plein, fig. 1, pour une demi-ferme seulement. Le polygone des forces n'est aussi tracé que pour la même demi-ferme. Les forces intérieures se déterminent au moyen des forces extérieures par l'une des trois méthodes, de Culmann, de Ritter ou de Cremona. Nous nous contenterons de donner les calculs d'une pièce de chaque type :

La membrure supérieure BF, la membrure inférieure CD, la barre de treillis BD ont la même force extérieure, qui est égale au rayon qui va de  $O''$  entre les efforts 6 et 7, fig. 2, de 13.500 k.

L'effort dans la membrure supérieure BF s'obtient en multipliant la force extérieure par la distance  $q$  du nœud opposé D à cette force, et en divisant le produit par la distance  $d$  du même point D à la membrure ; on obtient ainsi un effort de

$$\frac{13.500 \times 1.100}{1.200} = 12.375 \text{ à la compression } ^1$$

L'effort dans la membrure inférieure CD se calcule d'une manière analogue en considérant le nœud B ; il est égal à :

$$\frac{13.500 \times 0,300}{1,200} = 3.375 \text{ à la compression}$$

L'effort dans la barre de treillis BD peut encore se déterminer par la même méthode, en prenant comme nœud le point d'intersection des membrures BF et CD ; mais au point considéré, ces membrures sont presque parallèles, il suffit dès lors de décomposer, dans le polygone des forces, la force extérieure<sup>2</sup>

1. Le sens des efforts s'obtient suivant la méthode indiquée page 85.

2. Rappelons que la force extérieure est la somme de toutes les forces agissant sur la construction à gauche de la section. Pour les membrures et





cas précédent. Si nous appliquons la méthode aux pièces que nous avons déjà considérées nous arrivons aux efforts suivants.<sup>1</sup>

*Membrure inférieure CD, du côté de la charge*

$$\text{Effort de traction} \quad \frac{6.500 \times 2,45}{3 \times 1,20} = \frac{13.270}{3} = 4.423 \text{ k}$$

du côté opposé à la charge

$$\text{Effort de compression} \quad \frac{7.700 \times 2,30}{3 \times 1,20} = \frac{14.758}{3} = 4.919 \text{ k}$$

*Membrure supérieure BF, du côté de la charge*

$$\text{Effort de compression} \quad \frac{6.500 \times 3,50}{3 \times 1,20} = \frac{18.960}{3} = 6.320 \text{ k}$$

du côté opposé à la charge

$$\text{Effort de tension} \quad \frac{7.700 \times 0,70}{3 \times 1,20} = \frac{4.492}{3} = 1.500 \text{ k}$$

*Barre de treillis BD.* — En faisant la décomposition dans le polygone des forces, comme cela a été fait pour la charge totale, on trouve :

$$\text{du côté de la charge} \quad \frac{1.500}{3} = 500 \text{ compression}$$

$$\text{du côté opposé} \quad \frac{3.500}{3} = 1.170 \text{ tension}$$

*Montant BC.* — On trouve comme précédemment, dans le polygone des forces :

$$\text{du côté de la charge} \quad \frac{1.000}{3} = 330 \text{ compression}$$

$$\text{du côté opposé} \quad \frac{2.000}{3} = 670 \text{ compression}$$

On opérerait de la même manière pour toutes les pièces de la ferme, en remarquant toutefois que lorsque les membrures ne

1. Remarquons que l'échelle des forces change ; le polygone de la fig. 2 étant tracé pour la charge totale de 150 k. et la surcharge n'étant que de 50 k. l'échelle est 3 fois plus grande, ou ce qui revient au même, on divisera les efforts obtenus par 3.



- FE

nt le  
sior  
min  
es r  
te cc  
et I  
*inf*

ppos

Comp

*sup*

Comp

pos

*tri ci*

icon

quon

i ve

pos

BC,

ure

nts :

i ve

oppe

*xim*

s qu

es c

otal



## FERME COU

des pièces  
s sections p  
leur résista  
e ait été fa  
pour chac

iquelle s es

adjacents,  
ection de l  
on peut lais

occuper que

is l'avons de  
ntants est t  
te dans les  
relativemen  
mes qui diff  
harges.

omme exem

t

$$a = 1^m,30$$

sions  $\Delta F = \frac{1}{2}$

dans le pol  
re égale à  
g. 3'. Ce p  
cause de l  
entre de gr  
aux segmen  
mier polyg  
ûre. Dans l  
3° elles agie  
posés aux |

du polygone s



## § 8 — FERME COURBÉE A DE

des sections des pièces ; il est nécessaire de déterminer ces sections par une méthode qui vérifie ensuite leur résistance. Supposons que l'approximation ait été faite. La première chose à faire, pour chaque pièce, est de calculer  $\frac{s}{E \omega a^2}$ , dans laquelle  $s$  est la longueur d'un des deux nœuds adjacents,  $a$  la distance entre les nœuds opposés,  $\omega$  la section de la pièce et  $E$  le module d'élasticité.

Toutefois, on peut laisser  $E$  de côté et se contenter de calculer  $\Delta F =$

Comme nous l'avons déjà vu, l'influence des montants est très faible, et encore plus petite dans les fermes, où les montants ont un rôle relativement plus important. La forme des fermes qui diffère beaucoup de celle des fermes à pression des charges.

Donnons, comme exemple, le calcul de la pièce 5.

On a

$$s = 1^m,70, \quad a = 1^m,30, \quad \omega = 0,0$$

Les expressions  $\Delta F = \frac{s}{\omega a^2}$  étant calculées comme forces dans le polygone des forces, la distance polaire égale à  $\Sigma \Delta F$ , on construit le polygone funiculaire, fig. 3<sup>1</sup>. Ce polygone, qui a été tracé, à cause de la symétrie, à partir de la hauteur du centre de gravité  $S'$  de la ferme, est la suite de pôle aux segments interosés par le premier polygone, et le polygone funiculaire. Dans le 2<sup>e</sup>, les forces agissent horizontalement, dans le 3<sup>e</sup> elles agissent horizontalement aux nœuds opposés aux pièces courbées.

1. Les rayons du polygone sont perpendiculaires aux forces.



FERM

Charge  
permanente  
et surcharge  
totale

— 3.37

— 19.37.

is sont

BE A  
UR LI

*Plan*

de Pl.  
sur de  
sans e  
de ce  
héorie  
s. Nou  
ares ; i  
pure.

suiva  
ferme  
es mo  
manen

. . . .  
rge co  
it de le  
- Com  
ne per

## — FERME C

ns des piéc  
r ces section  
uite leur rés  
ative ait été  
ire, pour c

s laquelle s

ds adjacent  
la section d  
ls, on peut l

e s'occuper

nous l'avon  
montants e  
petite dans l  
de relative  
fermes qui  
es charges.

s, comme ex

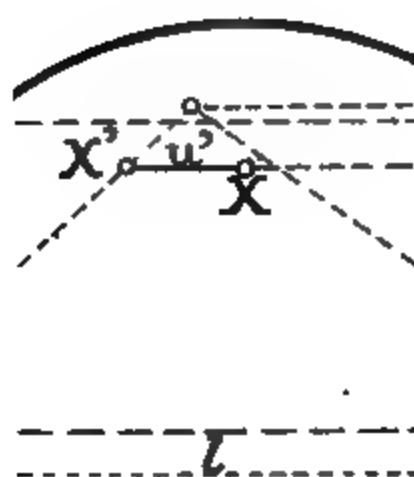
1,70,  $a = 1^m$

pressions  $\Delta F$ :

ces dans le  
laire égale  
t, fig. 3<sup>1</sup>. Ce  
e, à cause d  
a centre de  
ble aux segn  
premier po  
culaire. Dan  
le 3<sup>e</sup> elles t  
opposés au

ons du polygo

et lorsque l'effort horizontal,  $P$ , est nul, la réaction  $R$  est verticale.



**Fig.**

issant la position de la  
ints  $X'$  et  $A$ , il suffit de  
dant de la ligne des i  
lonné par l'intersection  
Cette construction a é  
u ainsi les points 1 à  
ons.

nts correspondent aux  
oit de la ferme. Les  
es efforts agissant à ga  
térêt, dans le cas qui  
mplète et de montrer  
t au point 44.

sième polygone funicul  
on l'a tracé complète  
onstruit les segments u

quée que pour l'effort 9, mais au lieu de construire  $u'$  en menant une horizontale à une distance  $l$  de la ligne des appuis, comme cette horizontale tombait très loin, on a construit  $\frac{u'}{2}$  en menant l'horizontale à une distance  $\frac{l}{2}$  seulement.

La courbe des intersections des réactions étant tracée, il est facile de déterminer par une simple décomposition de forces, comme cela avait été fait pour les charges, les réactions correspondant à tous les efforts horizontaux du vent ; cette décomposition a été faite, fig. 9, en disposant les forces de manière à obtenir à la suite les unes des autres toutes les réactions de droite. L'addition de ces réactions, qui sont disposées sous forme de polygone des forces, donne la réaction totale de droite. Au moyen du pôle O, situé à l'extrémité de cette réaction et des forces 1. 2... 11 portées sur l'horizontale menée par l'autre extrémité de la réaction, on a tracé la ligne de pression correspondant aux efforts horizontaux du vent ; cette ligne de pression passe par les appuis A et B.

Il ne reste plus après cela qu'à déterminer les forces intérieures, comme nous l'avons fait pour les charges ; ces efforts se calculent par la formule  $\frac{Qq}{d}$ , où Q est la force extérieure, q sa distance au nœud opposé à la pièce, et d la distance normale du nœud à celle-ci.

En appliquant cette formule aux quatre pièces que nous avons considérées pour les charges, on trouve les efforts suivants :

Membrure inférieure	FD	$\frac{2.250 \times 7,20}{1,3}$	= 12.460 k. tension.
Membrure supérieure	EC	$\frac{2.250 \times 6,30}{1,15}$	= 12.330 k. compression.
Barre de treillis	CF	$\frac{2.250 \times 2,35}{3,75}$	= 1.410 k. tension.
Montant	CD	$\frac{2.150 \times 2,40}{5,00}$	= 1.030 k. compression.

*Calcul approximatif.* — Il nous reste à dire un mot sur la manière dont on peut déterminer approximativement les sec-

— FERMES

a ferme. On  
instante. L  
si ne dépen

ui n'ont pa  
i détermina  
tant, suffir  
onde épure  
e les lignes  
e sont les ,  
*utions de te*  
t de tempér  
ant de nou  
on de ces ef  
t utile d'aj  
ur portée,  
ement gran  
ar suite ple  
e fait que l  
ntre la cha  
*ystème avec*  
ipare ce sys  
articulation  
ssi sûr de la  
stance des  
iences peu  
e articulati  
le, qui enl

## CHAPITRE DIXIÈME

---

### CALCUL DES JOINTS DES POUTRES

- § 1. *Considérations générales*
- § 2. *Couvre-joints d'âmes*
- § 3. *Couvre-joints de cornières*
- § 4. *Joint des semelles.*



## CHAPITRE DIXIÈME

### CALCUL DES JOINTS DES POUTRES

#### § 1

#### CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Les poutres se composent en général d'âmes, de cornières et de semelles. Lorsqu'elles dépassent certaines limites de longueur et de poids, il devient nécessaire de les diviser pour le transport et de faire l'assemblage des tronçons sur place. On cherche dans ce cas à disposer les joints de manière à avoir le moins possible de rivets à poser hors de l'atelier. La rivure au chantier coûte plus cher et elle n'est pas aussi bonne si elle n'est pas faite avec un soin extrême, parce qu'on n'est pas aussi bien installé qu'à l'usine. Pour réduire au minimum le nombre de rivets à poser au chantier, on rapproche autant que possible les joints des différents fers qui constituent la poutre ; mais il y a, notamment pour les semelles, des distances minima qu'il est nécessaire de laisser entre ces joints, si l'on veut avoir une bonne liaison.

Considérons une membrure de poutre composée d'une âme, de deux cornières et d'un certain nombre de semelles.

L'âme et les deux cornières ont chacune leur couvre-joint propre. Si ces couvre-joints ont une section équivalant à celle de la pièce qu'ils recouvrent, et s'ils sont attachés avec un nombre de rivets suffisant, il n'y a aucun inconvénient à mettre les joints en regard les uns des autres.



Les

, par  
me s  
s éta  
joint  
lles :  
rer p  
l'eff  
cou  
ant j  
d'ad  
cor  
tion  
ou  
s loi  
eme  
oser  
épar  
uisq

er un  
ie co  
les  
et de  
ctio

vre-j  
resp  
irs, l  
Nor  
a l'e  
il su  
verse

## § 2

## COUVRE-JOINTS D'AMES

Les joints d'âmes ont en général deux couvre-joints placés des deux côtés de la pièce. C'est la meilleure disposition de joint possible. Chacun des couvre-joints transmet la moitié de l'effort et leur résultante reste dans l'axe de la pièce, fig. 255.

Si l'on désigne par  $\Omega$  la section de l'âme, par  $n$  le nombre de rivets nécessaires de chaque côté du joint, par  $\omega$  la section d'un rivet, on devra avoir  $n \geq \frac{\Omega}{2\omega}$ .

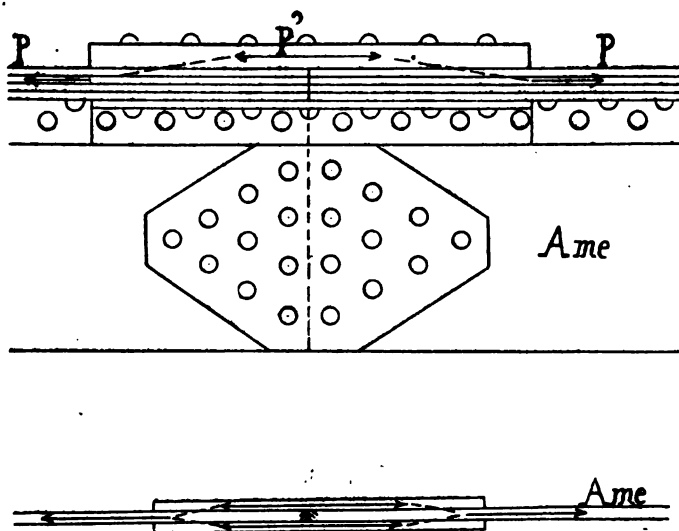


Fig. 255.

Pour ce qui concerne la disposition, les rivets des files les plus éloignées du joint devront être autant que possible moins nombreux que les autres; la solution qui affaiblirait le moins le joint consisterait à mettre, comme l'indique la fig. 255, un seul rivet sur la première file, deux sur la seconde, etc.

## CHAPITRE X — CALCUL DES .

On désigne par  $a$  le nombre  
 de filets de la file la plus  
 éloignée d'un rivet, par  $e$  l'épaisseur  
 de la tôle, par  $\Omega_j$  la section de la

$$\Omega_j = 2 \cdot e_j \cdot d \cdot b$$

$$\Omega_j = \frac{\Omega}{2} + (e_j \cdot b -$$

### § 3

## COUVRE-JOINTS DE

On suppose que les couvre-joints ont  
 une épaisseur suffisante, rien ne s'oppose  
 à ce qu'ils soient en face l'un de l'autre  
 si les joints ne sont pas en  
 sautoir, les conditions à remplir

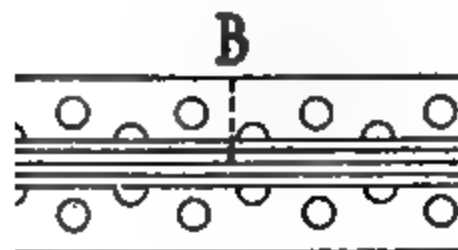


Fig. 256.

On suppose que les  
 cornières ont une épaisseur  
 suffisante, rien ne s'oppose  
 à ce qu'ils soient en face l'un de l'autre  
 si les joints ne sont pas en  
 sautoir, les conditions à remplir

On suppose que les sections nettes, déduites  
 de la section brute, seraient toujours par un rivet.

### § 3 — COUVRE-JOINTS DE CORNIÈRE

ons  $n = \frac{\Omega}{\omega}$ ,  $n$  étant le nombre de rivets

e.

ignons de plus par :

le nombre de rivets sur une aile horizontale  
ou C et l'extrémité A ou D d'un couvre-

le nombre de rivets sur l'aile verticale de  
ou CD.

le nombre de rivets dans l'aile horizontale  
des joints B et C.

le nombre de rivets dans l'aile verticale



Fig. 257.

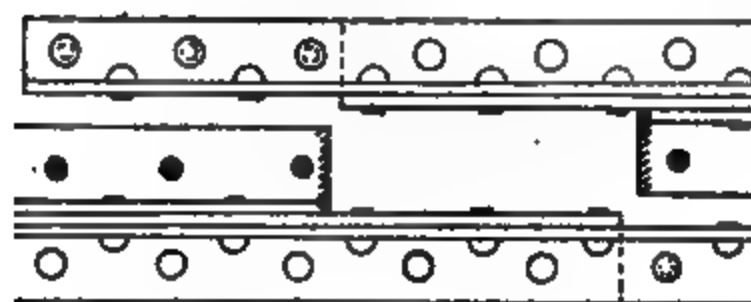


Fig. 258.



Fig. 259.

avons représenté dans les fig. 257, 258  
possibles, contre lesquelles on devra  
avoir une résistance suffisante au joint.

Exprimons les conditions à remplir

*Rupture des deux couvre-joints au des joints (fig. 257).*

Condition de résistance :

$$2\Omega_j + p_r \omega \geq 2\Omega \quad \text{ou} \quad p_r \geq \frac{2\Omega - 2\Omega_j}{\omega}$$

*Rupture par les deux joints, un côté des tronçons (fig. 258).*

Condition de résistance :

$$2m_h \omega + 2m_v \omega + p_r \omega \geq 2\Omega \quad \text{ou} \quad 2m_h + 2m_v + p_r \geq \frac{2\Omega}{\omega}$$

*Rupture d'un couvre-joint par un côté du joint (fig. 259).*

Condition de résistance :

$$m_h \omega + 2m_v \omega \geq \Omega \quad \text{ou} \quad m_h + 2m_v \geq \frac{\Omega}{\omega}$$

Les deux cas de rupture suivants dans les figures; ils donnent des conditions plus défavorables que les précédentes.

*Rupture par les deux joints par cisaillement de pièce. Les couvre-joints sont séparés par un tronçon.*

$$2m_h \omega + 2m_v \omega + 2p_r \omega + j \geq 2\Omega$$

Cette condition est plus favorable que la précédente; n'y a pas à en tenir compte.

*Rupture d'un couvre-joint en B; l'autre côté du joint en C, en cisillant les rivets sur la pièce.*

$$\Omega_j + p_r \omega + m_v \omega + m_h \omega \geq \Omega$$

Cette condition peut se déduire de la précédente; elle n'est donc pas à considérer séparément.

En résumé :

*La condition (2) montre que lorsqu'on garde le nombre des rivets dans le joint, on ne peut pas séparer les deux joints, on ajoute 2*

*La première condition montre que les joints ne peuvent être au même point que pour :*

$$\Omega \leq \Omega_j$$

*Elle montre en même temps que pour  $\Omega_j < \Omega$  on devra avoir :*

$$p_v \geq \frac{2\Omega - 2\Omega_j}{\omega}.$$

*Enfin la troisième condition exprime que, pour toute distance des joints, on devra avoir :*

$$m_h + 2m_v \geq n.$$

Il va sans dire que la limite inférieure de la section  $\Omega_j$  est  $\frac{\Omega}{2}$ . Cette condition est donnée par une rupture droite dans un joint.

En résumé, deux cas peuvent se présenter : si la section du couvre-joint est au moins égale à celle de la cornière, on pourra mettre les joints des cornières en regard, et l'on aura de chaque côté du joint un nombre de rivets déterminé par la condition :

$$m_h + m_v \geq n.$$

Dans le second cas, où  $\Omega_j < \Omega$ , le nombre des rivets entre les deux joints se déterminera par la condition (1), et les autres rivets par les conditions (2) et (3).

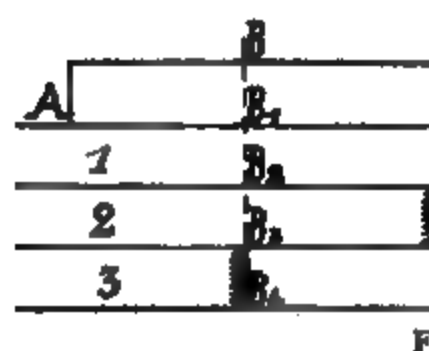
#### § 4

### JOINTS DES SEMELLES

Considérons d'abord le cas où les joints ne sont pas au même point et prenons, pour fixer les idées, fig. 260, trois semelles 1, 2, 3, ayant les joints en escalier. Examinons les ruptures qui peuvent se produire ; nous en déduirons les conditions que doit remplir le joint. Désignons par  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  les sections des

## CHAPITRE X — CALCUL

es, par  $\Omega$ , la section  
vet, par  $n_{A-B}$ ,  $n_{B-C}$ ,  
es points A et B, B et



on suppose une ruptu  
lition a).

*Le couvre-joint aura u  
e la semelle la plus épa  
r le cas d'une rupture  
ve à la condition suiv  
la section des rivets en  
de celle du couvre-joi  
me des sections des d*

$$n_{B-C} \cdot \omega +$$

rupture suivant AB, B  
d'un joint extrême à l'  
s rivets doit être égale  
en ce joint :

$$n_{A-B} \cdot \omega \geq \Omega$$

n une rupture B, B, C, C

$$(n_{B-C} + n_{C-D} + n_{E-F})$$

sulte de la formule (1)  
qu'on le voudra, à la  
A la limite, si l'on ré  
-joint devra avoir une  
ix semelles.

Le rapprochement des joints, comme on le voit par la troisième condition, ne donne aucune diminution dans le nombre total des rivets. Les rivets que l'on supprime entre les joints sont à reporter dans la partie DE. On a donc une augmentation d'épaisseur du couvre-joint sans diminution de sa longueur.

Il est utile de remarquer de plus que si l'on rapproche les joints entre les points A et D, il ne doit jamais y avoir moins de rivets qu'entre D et E, car une rupture  $B_1B_2C_2D_1E$  qui nous a donné la condition (3) se transformerait en rupture  $B_1B_2C_2D_1A$ . A partir du moment où les joints sont assez rapprochés pour que cette condition ne soit plus satisfaite, il est nécessaire d'allonger le couvre-joint vers la gauche.

*En résumé, la solution la plus avantageuse est celle qui donne au couvre joint une section égale à la plus forte semelle, et l'on peut donner les deux règles suivantes pour ne pas trop compliquer les conditions :*

1° *Le nombre des rivets, entre deux joints consécutifs de semelles  $i$  et  $i + 1$ , devra correspondre à une section équivalant à celle de la plus forte des deux semelles  $i$  et  $i + 1$ .*

2° *D'un joint extrême à l'extrémité du couvre-joint, la section des rivets équivaldra à celle de la semelle interrompue dans ce joint.*<sup>1</sup>

Les semelles ont, en général, des sections très peu différentes l'une de l'autre, et souvent elles ont toutes la même épaisseur ; on aura dans ce cas :  $n_{A-B} = n_{B-C} = n_{C-D} = n_{D-E}$ , et le nombre total des rivets du couvre-joint sera  $\frac{4\Omega}{\omega}$ ,  $\Omega$  étant la section d'une semelle.

Si tous les joints étaient faits au même point, la section du couvre-joint serait  $3\Omega$  et le nombre des rivets  $\frac{6\Omega}{\omega}$  beaucoup plus grand que dans le cas précédent.

D'une manière générale, si l'on a  $i$  semelles égales, le nombre des rivets dans un joint du type de la fig. 260 sera de :

$$\frac{(i + 1) \Omega}{\omega}.$$

1. Ces deux règles s'appliquent à un joint d'un nombre quelconque de semelles. Il est facile, en faisant un raisonnement analogue, de passer d'un joint de 3 semelles à un joint d'un nombre quelconque de semelles.



# CHAPITRE X — CALCUL DES JOINTS

et si les joints des semelles sont nécessaires sera de :

$$(2t) \frac{\Omega}{\omega}.$$

croisés. — Considérons de nouveau le cas où les joints, au lieu de se faire comme l'indique la fig. 260, se font comme la fig. 261, les conditions de calcul sont les mêmes, mais la condition (3) disparaît.

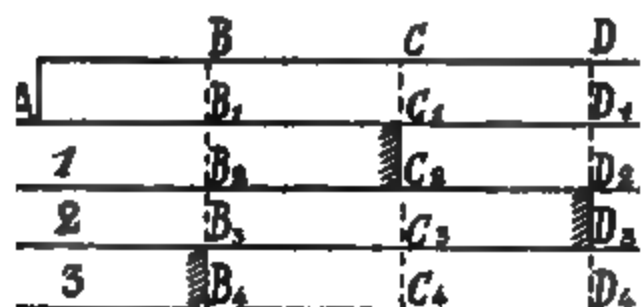


Fig. 261.

Il résulte de cette disposition que, en ouvrant le joint, on peut rapprocher les points de rupture des rivets  $n_{A-B}$  et  $n_{D-E}$  ; mais pour avoir deux joints un nombre de rivets par section de la plus forte semelle sera le même. Les ruptures  $B_1B_2C_1C_2A$  et  $D_1D_2C_2C_3$  ne pourront se produire par les trois joints ne doit pas être prise en compte.

On voit, pour fixer les idées, que tout joint donne la section  $\Omega$ . Le joint qui donne la section  $\Omega$  est celui qui aura un couvre-joint. Les nombres de rivets seraient alors :

$$n_{A-B} = n_{D-E} = \frac{\Omega}{\omega}; \quad n_{B-C} = n_{C-D} = \frac{\Omega}{\omega}.$$

On en déduit pour le nombre total des rivets :

$$\frac{3\Omega}{\omega},$$

tandis qu'en donnant au couvre-joint la même section qu'à la semelle ce nombre serait :

$$\frac{4\Omega}{\omega}.$$

On réduit de moitié le nombre des rivets entre les joints.

Quand il y a plus de 3 semelles on retombe, pour les semelles suivantes, dans un escalier, et l'on devra avoir entre les joints de la deuxième semelle et de la quatrième et entre celui de la troisième et de la cinquième un nombre de rivets égal à  $\frac{\Omega}{\omega}$ .

La disposition des joints croisés a donc un petit avantage sur celle des joints en escalier, et on lui donnera la préférence dans tous les cas où elle sera possible. Les joints en escalier permettent dans certains cas d'assembler les tronçons plus facilement, et ont, à cet autre point de vue, un avantage d'assemblage.

*Joints en escalier à double couvre-joint*, fig. 262. — Il arrive quelquefois, quand les semelles sont très-larges, qu'on peut dans l'espace que laissent les cornières jusqu'au bord des semelles, mettre un couvre-joint.

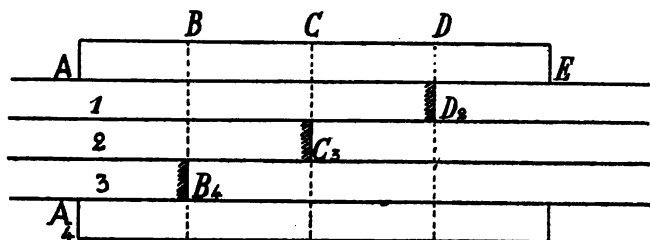


Fig. 262.

Dans ce cas la rupture suivant la ligne  $A, B, C, D, E$  montre, si on la compare à la troisième condition du joint en escalier à couvre-joint unique, que l'on peut réduire le nombre total des rivets. En effet, la condition :

$$n_{B-C} + n_{C-D} + n_{D-E} \geq \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3}{\omega}$$

## CHAPITRE X — CALCUL DES JOINTS

remplacée par :

$$n_{A-B} + n_{B-C} + n_{C-D} + n_{D-E}$$

l'on suppose que toutes les semelles ont la même épaisseur, on diminue le nombre des rivets par rivet, et on suppose que chacun des couvre-joints ait une

la même section que les parties A — B et D — E. On suppose aussi que dans les joints à simple coque, le nombre des rivets dans le joint sera de 3 sur 4, et de 4 sur 5, mais il n'en est en général pas ainsi. On peut s'exprimer comme suit : *La somme des sections des deux couvre-joints de la partie DF, doit être égale à n fois la section des semelles. Le nombre des rivets comptés sur un seul*

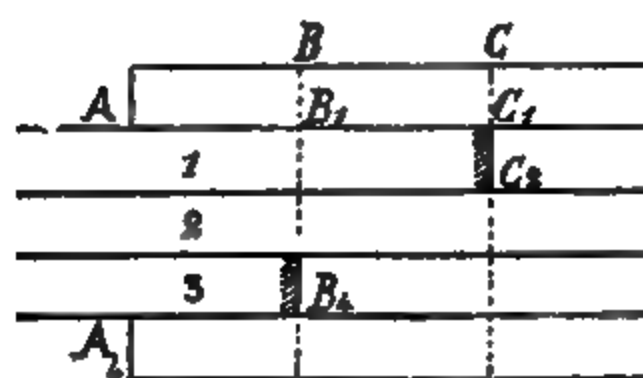


Fig. 263.

*joint croisés à double couvre-joint, on considère le dernier cas, celui du joint à double coque. C'est de tous les joints de semelles le plus sûr. C'est de tous les joints de semelles celui qui donne la meilleure section par rivet et qui donne la meilleure section par rivet. Nous avons déjà vu, dans le cas d'un joint à double coque pour 3 semelles, qu'il faut une fois et demie la section de*

#### § 4 — JOINTS DES SEMELLES

mettre entre deux joints un nombre  $n$  de rivets, la section de la demi-semelle la plus faible sera dans le cas du double couvre-joint des deux couvre-joints remplie par le nombre des rivets de la partie la plus faible. Comme dans le cas précédent, se référant au cas où toutes les semelles sont de même épaisseur,  $n$  est donc de  $2n$ . Cela suppose qu'on ne change pas le même nombre de rivets. On modifiera la condition comme dans le cas précédent. Et se présenter un grand nombre de cas, on comprendra que nous ne pouvons pas nous sommes contentés de citer un exemple. On suivra la même méthode, en suivant la même méthode, en suivant les circonstances qui se présentent.



## CHAPITRE ONZIÈME

---

### PILES EN MAÇONNERIE

- § 1. *Considerations générales*
- § 2. *Calcul d'une pile de pont en arc* Planche 29
- § 3. *Culée de pont en arc* Planche 29
- § 4. *Pile de grande hauteur* Planche 30
- § 5. *Calcul d'une tour de phare ou d'une cheminée en maçonnerie*



## CHAPITRE ONZIÈME

### PILES EN MAÇONNERIE

#### § 1

#### CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

On admet généralement que les maçonneries n'opposent aucune résistance à la traction. Une résistance à ce genre d'efforts est très faible et variable ; il est prudent de ne pas en tenir compte. On se place ainsi dans des conditions un peu plus défavorables qu'elles ne le sont en réalité, ce qui ne fait qu'augmenter la sécurité. La conséquence de cette hypothèse, c'est qu'on évite autant que possible les systèmes de construction où il pourrait se produire de la tension, et l'on étudie à cet effet, des dispositions spéciales, appropriées aux maçonneries.

Cela ne veut pas dire qu'un massif de maçonnerie ne puisse pas être soumis à une flexion ; mais chaque fois qu'il y a flexion il est nécessaire qu'il y ait en même temps une compression assez forte pour annuler les efforts de tension engendrés par cette flexion.

Cette dernière condition étant remplie, la théorie générale de la flexion s'applique aux maçonneries.

Si l'on désigne par  $N$  l'effort de compression, par  $M$  le moment fléchissant agissant dans une section, par  $\omega$  la surface et par  $I$  le moment d'inertie de la section, par  $r$ ,  $v'$  les dis-



tances des fibres extrêmes, l'effort maximum par unité de section sera dans ces fibres.

$$\text{D'un côté de l'axe de flexion : } R = \frac{N}{\omega} + \frac{Mv}{I}$$

$$\text{De l'autre côté : } R = \frac{N}{\omega} - \frac{Mv'}{I}$$

A la condition que  $\frac{N}{\omega} > \frac{Mv}{I}$ , ce qu'il sera toujours nécessaire de vérifier.

Si la compression et la flexion sont produites par une même force extérieure agissant en dehors du centre de gravité de la section, la condition que doit remplir cette force peut s'exprimer comme suit :

*La force extérieure devra passer à l'intérieur du noyau central (voir page 249).*

Que se passera-t-il si la force extérieure sort du noyau central ? La résistance du massif ne sera pas compromise tant que le coefficient de travail ne dépassera pas la limite convenable ; mais les efforts au lieu de se répartir sur toute la surface de la section ne se répartiront que sur une portion de cette surface, et c'est cette portion qu'il est intéressant de déterminer. Dans un grand nombre de cas, cette portion ne pourra se déterminer que par tâtonnements ; dans d'autres, comme dans celui d'une *section rectangulaire*, il sera possible de le faire directement. Nous avons vu, page 220, que le noyau central a pour hauteur le tiers de celle du rectangle. Si l'on a une section rectangulaire de hauteur  $h$ , fig. 264, et une charge agissant au point P, situé à une distance  $p$  de l'arête AB, la surface sur laquelle l'effort P se répartira sera donnée par le rectangle ABCD ayant une hauteur

$$h' = 3p$$

L'effort par unité de surface de section dans la fibre AB, sera égale à

$$R = \frac{2P}{h'b} = \frac{2P}{3p.b}$$

L'effort dans la fibre CD est nul.

Dans le cas où  $p$  est plus grand que  $\frac{h}{3}$ , l'effort P passe dans le noyau central et il se répartit sur toute la section.

L'effort dans la fibre AB, en désignant par  $x$  la distance de l'effort P au centre S, est égal à

$$\frac{P}{bh} \left( 1 + \frac{6x}{h} \right) \text{ par unité de section}$$

et à

$$\frac{P}{bh} \left( 1 - \frac{6x}{h} \right) \text{ dans la fibre A'B'.$$

Nous donnons dans la fig. 4, Pl. 27, la variation du coefficient de travail dans une section rectangulaire, lorsque l'effort P se déplace sur l'axe du rectangle. Ce coefficient a été pris égal à l'unité, lorsque la charge P agit au centre S du rectangle. Tous les chiffres inscrits horizontalement représentent les efforts,

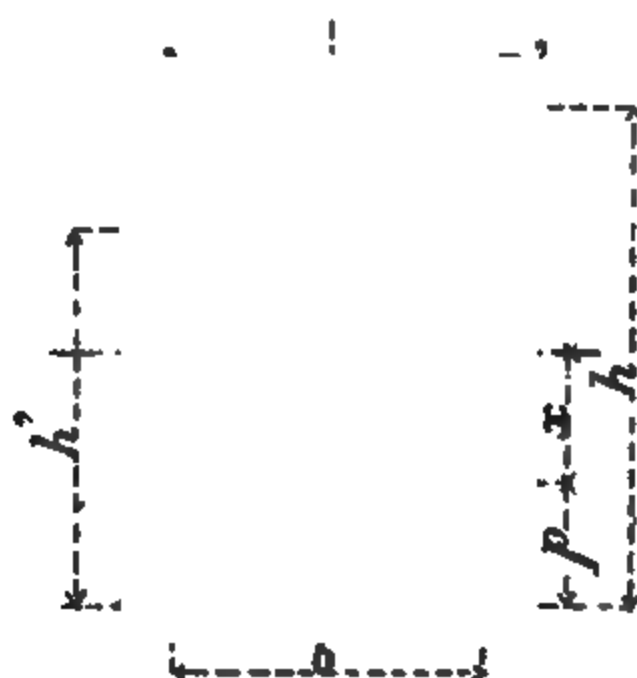


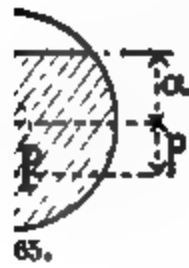
Fig. 261.

ceux qui sont inscrits verticalement les distances de l'effort au centre S, exprimées en fraction de la demi-hauteur du rectangle. La figure montre que jusqu'au tiers le coefficient croît suivant une ligne droite ; en ce point il est égal au double de ce qu'il est lorsque la charge agit au point S, au-delà, il croît suivant une courbe hyperbolique.

Le coefficient est triple à une distance de 0,56 de S, quadruple à une distance 0,66, quintuple à 0,74, etc. ; enfin il devient  $\infty$  pour une distance égale à l'unité c'est-à-dire à  $\frac{h}{2}$ .

## CHAPITRE XI — PILES EN MAÇONNERIE

*circulaire.* — Le noyau central d'une section circulaire  $d$  est un cercle ayant comme diamètre  $\frac{1}{4} d$  tant que la force extérieure ne s'éloignera pas de la distance plus grande que le quart du rayon, l'effort sera sur toute la section. Si l'effort passe juste au centre, on est à la limite ; l'effort de la fibre extrême tendue de la force sera le double de ce qu'il est lorsque l'effort agit au centre, tandis que la fibre opposée ne supporte aucune charge. Lorsque la force agit en dehors du noyau central, la charge ne se répartit que sur une surface limitée par un arc de la circonférence et par une ligne droite qui est la fibre neutre. Cette fibre neutre ne peut guère se déterminer que par tâtonnement et le problème devient très



difficile. Dans la figure 266 les distances  $a$  de la fibre tendue au centre, correspondant à quelques distances  $p$ , de la fibre comprimée au même point. Ces valeurs de  $a$  et de  $p$  correspondent à l'unité. Les chiffres de la figure 266 sont les résistances des matériaux de M. Collignon.

*évidées.* — Les sections que l'on adopte en général pour les massifs de maçonnerie sont pleines, et de forme circulaire, mais il est évident que lorsqu'il s'agit d'une résistance, les sections évidées, qui ont pour but de conserver aux fibres extrêmes, comme on l'a vu dans les poutres métalliques, économisent la matière.

Cette forme est sans importance dans les constructions de faible hauteur ; elle est même détruite en partie par les plus faibles efforts résultant de l'augmentation de la surface de parement dans les très hautes piles, par exemple, elle est détruite et l'on peut augmenter les hauteurs pour une même résistance des matériaux donnée.

*oblique.* — Quand la force extérieure agit obliquement, c'est-à-dire lorsqu'elle n'est pas normale à la section, elle se décompose en deux composantes, l'une normale à la section qui produit les efforts que nous venons d'examiner, l'autre

située dans le plan de la section et qui est un *effort de glissement*. On admet en général qu'il n'y a pas d'adhérence dans les joints des maçonneries, et l'on ne compte que sur le frottement pour résister aux efforts de glissement.

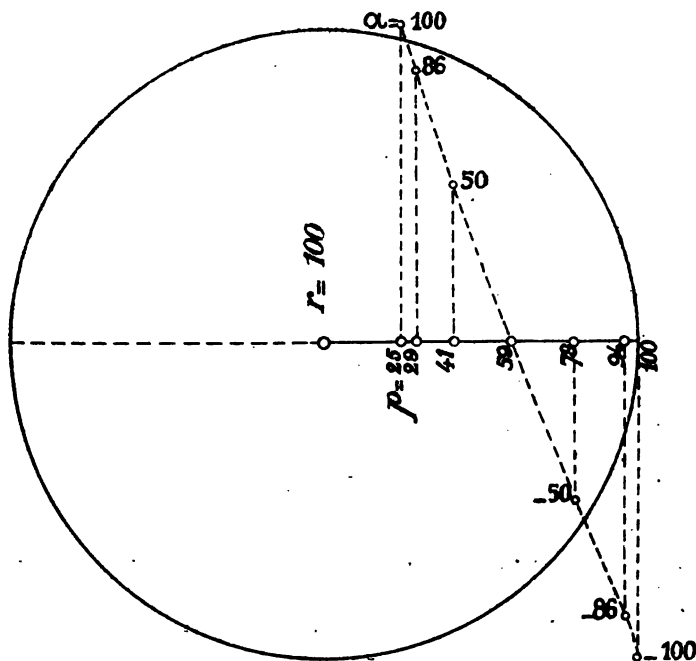


Fig. 266.

Comme on le sait, l'effort minimum nécessaire, pour produire un mouvement de glissement, est proportionnel à la charge; en d'autres termes, quelle que soit la grandeur d'un effort agissant sur un corps placé sur une surface plane, c'est

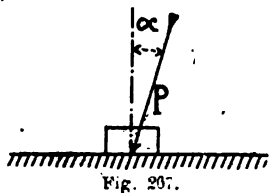


Fig. 267.

toujours pour un même angle d'inclinaison  $\alpha$  de la force avec la verticale que le corps se mettra en mouvement, cet angle  $\alpha$  est l'*angle de frottement*.

L'angle  $\alpha$  varie avec les pierres et la nature des maçonneries, mais en admettant comme inclinaison maxima  $22^\circ$ , qui est un minimum de l'angle de frottement on aura toute sécurité.

Dans le cas où il ne serait pas possible d'éviter une inclinaison supérieure à  $22^\circ$ , il serait nécessaire d'incliner les joints des maçonneries, de manière à ce que les efforts soient sensiblement perpendiculaires aux joints : c'est ce que l'on fait souvent dans les culées de ponts (voir fig. 268).

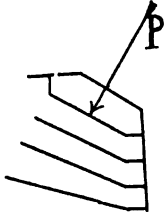


Fig. 268.

*Ligne de pression.* — La ligne de pression est le lieu de passage des forces extérieures ; elle s'obtient en divisant le massif en éléments et en déterminant la force extérieure dans

chacun des éléments.

## § 2

### CALCUL D'UNE PILE DE PONT EN ARC

(Planche 29).

La pile de la Pl. 29, fig. 1, est une pile sur laquelle s'appuient deux travées en arcs. Pour faire le calcul de cette pile on suppose qu'une des travées est entièrement surchargée, tandis que l'autre est libre. La réaction de l'arc chargé est de 240.000 k. celle de l'arc libre de 145.000 k. Ces deux réactions ont été composées dans le polygone des forces de la fig. 2, et donnent la résultante désignée par P.

La pile a été divisée en 7 éléments par 6 plans horizontaux ; ces éléments portent les N<sup>os</sup> 1 à 7, leurs poids ont été déterminés pour une densité de 2500 k. de la maçonnerie et pour une longueur de 3 m. correspondant à l'écartement de deux des arcs d'une même travée. Ces poids ont été portés dans le polygone des forces à la suite de la force P.

En menant par le point C des rayons parallèles à ceux du polygone des forces, on obtient à la base de chaque élément un point de la ligne de pression. Le point D, par exemple, s'obtient en menant un rayon CD parallèle au rayon qui va de

O à l'extrémité de la charge 4, cette charge étant celle de l'élément situé juste au-dessus de la ligne AB.

Le dernier rayon donne dans le polygone des forces la grandeur de la pression, de 1.120.000<sup>k</sup>, agissant sur le sol, et, dans la fig. 1, le point de passage de la résultante à 1<sup>m</sup>,24 du centre.

Les seuls points où il est intéressant de connaître la pression par unité de surface, sont les points E, F, où l'on détermine la pression sur le sol, et tous les points au-dessus où il y a une diminution brusque de largeur ; il n'y a que la section AB qui soit dans ce cas dans la fig. 1.

Si l'effort de 1.120.000 k. passait au centre de la section, le coefficient de travail, en négligeant la faible inclinaison, serait, par centimètre carré :

$$\frac{1.120.000}{300 \times 670} = 5^{\text{t}},6.$$

Comme la résultante passe à 1<sup>m</sup>,24 du centre, c'est-à-dire à  $\frac{1,24}{3,35} \frac{h}{2} = 0,37 \frac{h}{2}$ , le coefficient de travail maximum sera de  $5,6 \times 2,15 = 12$  k. par c.m<sup>2</sup>. 2,15 étant mesuré dans la fig. 4 Pl. 27.

Ce n'est que sur un terrain exceptionnellement résistant que l'on peut admettre un coefficient aussi élevé ; on ne dépasse pas en général 8 kilos. Les coefficients adoptés varient de 2 à 8 kil., 2 kil. correspondant à un très-mauvais terrain.

On cherche, en général, à faire passer la résultante dans le tiers intérieur de l'appui sur le sol ; mais lorsque la profondeur de fondation devient très grande, on est conduit, si l'on veut maintenir cette condition, à des dimensions exagérées. Il faut remarquer, en effet, que le terrain offre une résistance latérale à la pile, et que cette résistance a été négligée dans le calcul qui précède.

On tient compte, quelquefois, de la sous-pression exercée par l'eau sous la pile, et on retranche cette dernière du poids total. En opérant ainsi dans notre exemple, la résultante n'est plus que de 931.000 k. ; mais elle agit à 1<sup>m</sup>,50 de l'axe.

Le travail par centimètre carré s'obtient alors de la manière suivante :

1<sup>o</sup> Le coefficient, pour l'effort passant dans l'axe, est égal à :

$$\frac{931.000}{300 \times 670} = 4,6;$$

2<sup>o</sup> Pour une distance de 1<sup>m</sup>,50 de l'axe,

$$\frac{1,50}{3,35} \times \frac{h}{2} = 0,45 \frac{h}{2} \quad (\text{voir fig. 4, Pl. 27}).$$

on a un coefficient de travail :

$$R = 4,6 \times 2,4 = 11 \text{ k. par c.m}^2.$$

On calculerait de la même manière l'effort dans la section AB.

L'inclinaison des efforts sur l'horizontale étant très faible, il n'y a pas lieu de s'occuper de l'effort de glissement, ni de faire un appareillage à joints inclinés, sauf dans l'élément 2 qui reçoit directement les réactions des arcs.

### § 3

## CULÉE DE PONT EN ARC.

(Planche 29)

L'épure d'une culée de pont en arc diffère un peu de celle des piles ; elle n'est en général pas symétrique en coupe, fig. 3. La ligne verticale de passage de la résultante des poids n'est pas connue, et il est nécessaire de la déterminer au moyen d'un polygone funiculaire. La division du massif est faite en 5 éléments dont les poids ont été portés dans le polygone des forces de la fig. 4. Au moyen d'un pôle  $O_1$ , obtenu en portant suivant sa direction la réaction  $Q$  de l'arc, égale à 240.000 k., nous avons tracé un polygone funiculaire CR dont le premier côté se confond avec la réaction  $Q$ .

Le dernier côté de ce polygone donne directement la position de la résultante  $R$  des efforts agissant sur la base. L'épure

montre, fig. 4, que cette résultante est de 1.530.000 k. et qu'elle agit à  $1^m,800$  du centre de gravité de la base.

Le polygone funiculaire CR est une ligne de pression, mais elle ne représente pas la direction des forces intérieures dans le massif. Il est intéressant de connaître cette direction, qui peut servir à déterminer l'inclinaison des joints (voir fig. 269).

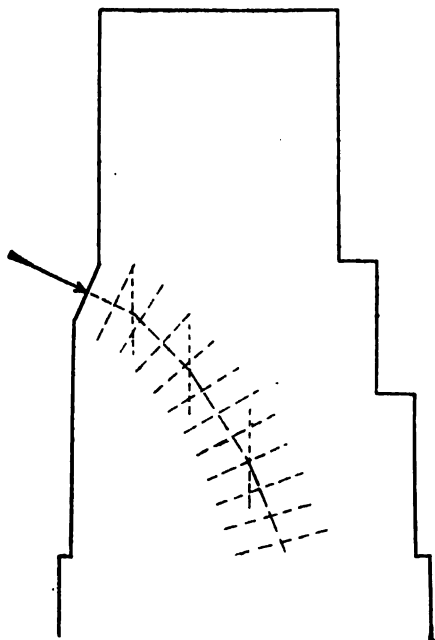


Fig. 269.

A cet effet on divise le massif en éléments verticaux ; mais il nous semble inexact de faire descendre les éléments jusqu'à la base : la maçonnerie qui se trouve au-dessous du passage de la réaction ne pourrait agir que par tension, ce qui est inadmissible ; nous arrêterons donc ces éléments un peu en dessous de la ligne des efforts intérieurs, comme cela est indiqué par les hachures. Avec le poids des éléments verticaux 1', 2', 3' portés dans le polygone des forces, figure 5, nous avons tracé en —.— le polygone funiculaire CP qui donne approximativement la direction moyenne des forces intérieures. Le



tracé de cette ligne n'a d'intérêt que dans les parties voisines de l'appui, plus loin, sa direction est plus incertaine ; on peut s'arrêter dès que l'inclinaison des efforts est assez grande pour dépasser l'angle de glissement. L'appareillage se fera en disposant comme l'indique la figure 269, les joints perpendiculairement au polygone funiculaire.

#### § 4

### PILES DE GRANDE HAUTEUR

(Planche 30)

Dans les piles de grande hauteur portant un viaduc, il devient nécessaire de tenir compte de l'influence du vent qui s'exerce sur le tablier et sur les piles elles-mêmes. L'effort maximum agit dans la direction perpendiculaire au tablier.

On peut négliger généralement les efforts qui s'exerceront sur la pile dans le sens longitudinal du viaduc, car les vents violents suivent la direction de la vallée. Si cependant la vallée est large et si les piles ne sont pas protégées, on examinera l'influence d'un vent transversal ; le tablier n'exercera dans ce cas, sur la pile, qu'un effort négligeable et ce sont les efforts du vent sur la pile elle-même qui seront seuls à considérer.

La détermination des efforts a été faite sur une pile de 64 mètres de hauteur, dans l'exemple de la planche 30. On connaît les efforts exercés par le tablier sur la pile <sup>1</sup>. Ces efforts sont de 601.960 k. pour la charge verticale et de 219.113 k. pour le vent. Les efforts dus à l'action du vent sur la pile et au poids propre de cette dernière sont au contraire inconnus ; ils dépendent de sa forme et de ses dimensions, qui sont à détermi-

1. Il y a en général deux cas à considérer : celui du vent de 275 k. sans surcharge sur le tablier et celui de 150 k. avec surcharge. Les deux cas se traitent par la même méthode ; nous n'avons examiné, dans la planche, que le premier, qui donne les efforts maximums.

ner. On ne peut donc procéder que par tâtonnement, en partant du haut. Les dimensions de la section supérieure dépendent de la largeur du tablier ; on peut les arrêter dès qu'on a terminé l'étude du tablier. Dans l'exemple de la planche la section supérieure a 10 m. sur 4 m.

Les dimensions de la pile en élévation ont été adoptées comme l'indique la fig. 1, tandis que les dimensions transversales résultent des efforts obtenus. Les dimensions en élévation étant adoptées, on peut déterminer les forces extérieures et les moments fléchissants dus au vent.

La pile a été divisée en 8 éléments de 8 m. de hauteur chacun, portant les n<sup>os</sup> 1 à 8. C'est dans les sections inférieures de ces éléments, désignées par I à VIII, que nous déterminons les efforts.

L'effort horizontal du vent sur le tablier agit à 6 m. 90 au-dessus de la pile.

Les efforts correspondant à un vent de 275 k. agissant sur le tablier et sur les éléments de la pile, sont donnés dans le tableau de la planche. Ces efforts ont été portés dans le polygone des forces de la fig. 3 et, avec une distance polaire de 500.000 k., on a tracé le polygone funiculaire AB, fig. 2, en partant du point de rencontre A de l'effort supérieur avec l'axe de la pile.

Le polygone funiculaire ainsi obtenu donne les moments fléchissants à toutes les hauteurs. Ces moments s'obtiennent en multipliant le segment mesuré entre le polygone funiculaire et l'axe par la distance polaire. On obtient ainsi à la section IV, par exemple, un moment de :

$$48,348 \times 500.000 = 9.174.000$$

En prolongeant le côté du polygone funiculaire coupé par une section, on obtient, sur l'axe de la pile, le point de passage de la résultante des forces extérieures de la section. Ces points sont marqués par les chiffres 1 à 8 pour les sections I à VIII, fig. 2, sur l'axe de la pile.

L'effort maximum sur l'unité de surface, dans une section quelconque, se détermine (voir page 464) par la formule :

$$R = \frac{N}{\omega} + \frac{Mv}{l} .$$

Mais on aura toujours à vérifier si  $\frac{N}{\omega}$  est plus grand que  $\frac{Mv}{I}$

L'effort  $N$  est la somme de tous les poids agissant au-dessus de la section ; le moment  $M$  est le moment fléchissant des efforts du vent, donné par le polygone funiculaire  $AB$ .

On commencera par adopter une largeur de la section I, puis on en déduira le poids de l'élément 1, et l'on calculera la valeur de  $R$ . Suivant que l'on arrivera à une valeur trop grande ou trop faible, on augmentera ou on diminuera la largeur. De la section I on passe à la section II, et ainsi de suite.

La forme à laquelle on est conduit pour la pile est une forme d'égale résistance ; cette forme est en général régulière ; s'il en était autrement, on la corrigerait dans les points réguliers. Il arrive souvent que dans la partie supérieure le coefficient maximum n'est pas atteint, parce que l'on serait conduit à des dimensions inadmissibles ; mais à mesure que l'on descend, le coefficient s'élève, et on a tout intérêt, au point de vue de l'économie, à arriver le plus vite possible au coefficient maximum.

La forme de la section des piles élevées des viaducs est presque toujours une forme rectangulaire pleine. Si l'on ne considère que les charges, la section pleine est la plus avantageuse : c'est celle qui donne le moins de surface vue et par suite aussi le moins de maçonnerie de parement. On aura de plus avantage à faire différer le moins possible les deux côtés du rectangle. Mais en tenant compte des efforts du vent, il en est tout autrement ; il devient nécessaire d'élargir autant que possible la section dans le sens de ces efforts, et une section vidée, avec un nombre suffisant de liaisons horizontales, convient parfaitement aux piles très élevées.

C'est une pile avec évidements qui est représentée dans la planche ; les sections sont toutes de la forme de la base indiquée à la partie inférieure de la fig. 2. L'élément 1 est seul plein.

Le coefficient de travail maximum adopté est de  $10^k$ , et ce coefficient est presque atteint dans toutes les sections, excepté dans la section I, où l'on n'a que  $8^k,9$ . Nous ne donnons pas le calcul de l'effort dans toutes les sections, mais seulement dans l'une d'elles, la section IV.

Les charges dans les sections sont inscrites dans la fig. 2; pour la section IV, elle est de 4.396.744<sup>k</sup>.

Le moment fléchissant **M** est de 9.174.000.

$$\Omega = 72^{\text{m}^2},96, \quad \frac{I}{v} = 229,76$$

$$R = \frac{4.296.744}{72,96} + \frac{9.174.000}{229,76} = 60.000 + 40.000 = 100.000 \text{ par m}^2$$

soit 10<sup>k</sup> par centimètre carré.

La ligne de pression ou le lieu de passage des forces extérieures, peut se déterminer en divisant le moment des forces horizontales par les charges verticales; le quotient donne la distance du point de passage de la force extérieure à l'axe de la pile. On peut aussi déterminer les mêmes points au moyen d'un polygone des forces, fig. 5. Dans ce polygone on porte sur une horizontale les efforts du vent, et les charges sur une verticale; la combinaison de ces efforts donne les forces extérieures en grandeur et en direction. Ces forces passent par les points 1, 2, 3, ... 8 de l'axe de la pile, obtenus au moyen du polygone funiculaire AB. Par ces points on a mené les lignes pointillées parallèles aux forces extérieures du polygone des forces, fig. 5. Ces parallèles déterminent les points de la ligne de pression tracée en trait pointillé. Cette ligne converge vers l'axe à mesure que l'on descend, l'influence des poids croît plus rapidement que celle du vent.

La force extérieure se rapprochant de plus en plus de la verticale à mesure que l'on descend, c'est dans la partie supérieure que l'effort de glissement a le plus d'importance; il est essentiel que l'inclinaison de la force extérieure ne dépasse pas l'angle de frottement. Cette condition doit être remplie même dans la section 0; c'est-à-dire que l'angle de la résultante de la charge du tablier et de l'effort horizontal du vent ne doit pas dépasser l'angle de frottement. Si cette condition n'était pas remplie, il y aurait lieu de chercher par des dispositions spéciales, soit dans l'appareillage, soit au moyen d'amarrages, la résistance nécessaire pour s'opposer au glissement.

## § 5

CALCUL D'UNE TOUR DE PHARE OU D'UNE  
CHEMINÉE EN MAÇONNERIE

On peut se demander d'abord si c'est la section circulaire ou la section carrée qui convient le mieux à la résistance. Au point de vue des charges, cela est indifférent ; mais en ce qui concerne les efforts dus au vent, la question demande à être examinée de plus près.

Pour faire la comparaison, supposons deux tours ayant la même largeur  $D$  en élévation. L'une des tours a une section carrée de  $D$  de côté et l'autre une section circulaire d'un diamètre  $D$ . L'épaisseur de la maçonnerie est la même dans les deux cas et laisse un vide d'un carré de côté  $d$  dans la première et d'un diamètre  $d$  dans la seconde. L'effort du vent est, comme on le sait, moindre sur une surface cylindrique que sur une surface plane, dans la proportion de 0,54 à 1.

Le rapport des coefficients de travail maximums dans les deux types de cheminée,  $R_c$  pour la cheminée cylindrique,  $R_q$  pour la cheminée carrée, est proportionnel au rapport des moments fléchissants et inversement proportionnel aux rapports  $\frac{I}{v}$  des sections ; on aura par suite :

$$\frac{R_c}{R_q} = \frac{\frac{D^4 - d^4}{6D}}{\frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}} \times 0,54 = 0,92 ;$$

Il résulte de cette comparaison qu'une section est à peu près aussi bonne que l'autre, au point de vue de la résistance au vent. La cheminée circulaire est moins résistante, mais elle subit des efforts plus faibles. D'autres considérations étrangères à la résistance donnent l'avantage aux sections circulaires, qui sont le plus souvent adoptées.

On peut se demander aussi si le coefficient de travail change quand, au lieu de frapper une cheminée carrée normalement à une face, le vent la rencontre suivant la diagonale.

L'effort maximum ne change pas.

En effet, le vent rencontre deux faces à  $45^\circ$ , et l'effort par unité de surface sur chacune de ces faces (voir page 20) est de

$$p \sin^2 \alpha = \frac{p}{2}.$$

Le coefficient de travail maximum de l'arête la plus fatiguée A sera par suite le même que celui que donnerait le vent frappant une des faces normalement.

Pour une direction du vent intermédiaire entre la direction diagonale et la direction normale à une face, l'effort sur une face serait  $p \sin^2 \alpha$ ,  $\alpha$  étant l'inclinaison du vent sur cette face, et l'effort sur l'autre face serait  $p \cos^2 \alpha$ .

Le coefficient de travail de l'arête A serait encore le même puisque

$$p \sin^2 \alpha + p \cos^2 \alpha = p.$$

Le coefficient de travail maximum dans une tour carrée reste donc le même, quelle que soit la direction du vent.

Nous avons traité dans la fig. 270 l'exemple d'une cheminée ronde de  $25^m,00$  de hauteur, en briques. Elle a été divisée en cinq éléments.

Le poids des éléments et la surface qu'ils offrent au vent sont donnés dans le tableau suivant, ainsi que les efforts correspondants du vent.

La densité de la maçonnerie en briques est comptée à  $1.800^k$ . L'effort du vent à  $100^k$  par  $m^2$  seulement, la cheminée étant abritée contre le vent.

Au moyen du polygone des forces nous avons tracé le polygone funiculaire AB, en partant du point A, sommet de la cheminée sur l'axe OA. Les abscisses de ce polygone, relativement à l'axe AO, multipliées par la distance polaire qui est de  $10^m,00$ , donnent les moments fléchissants dans les sec-

tions de la cheminée. Le coefficient de travail se détermine par la formule (voir page 464) :

$$R = \frac{N}{\Omega} + \frac{Me}{I}$$

et  $\frac{N}{\Omega}$  devra toujours être plus grand que  $\frac{Me}{I}$

Appliquons la formule à la base.

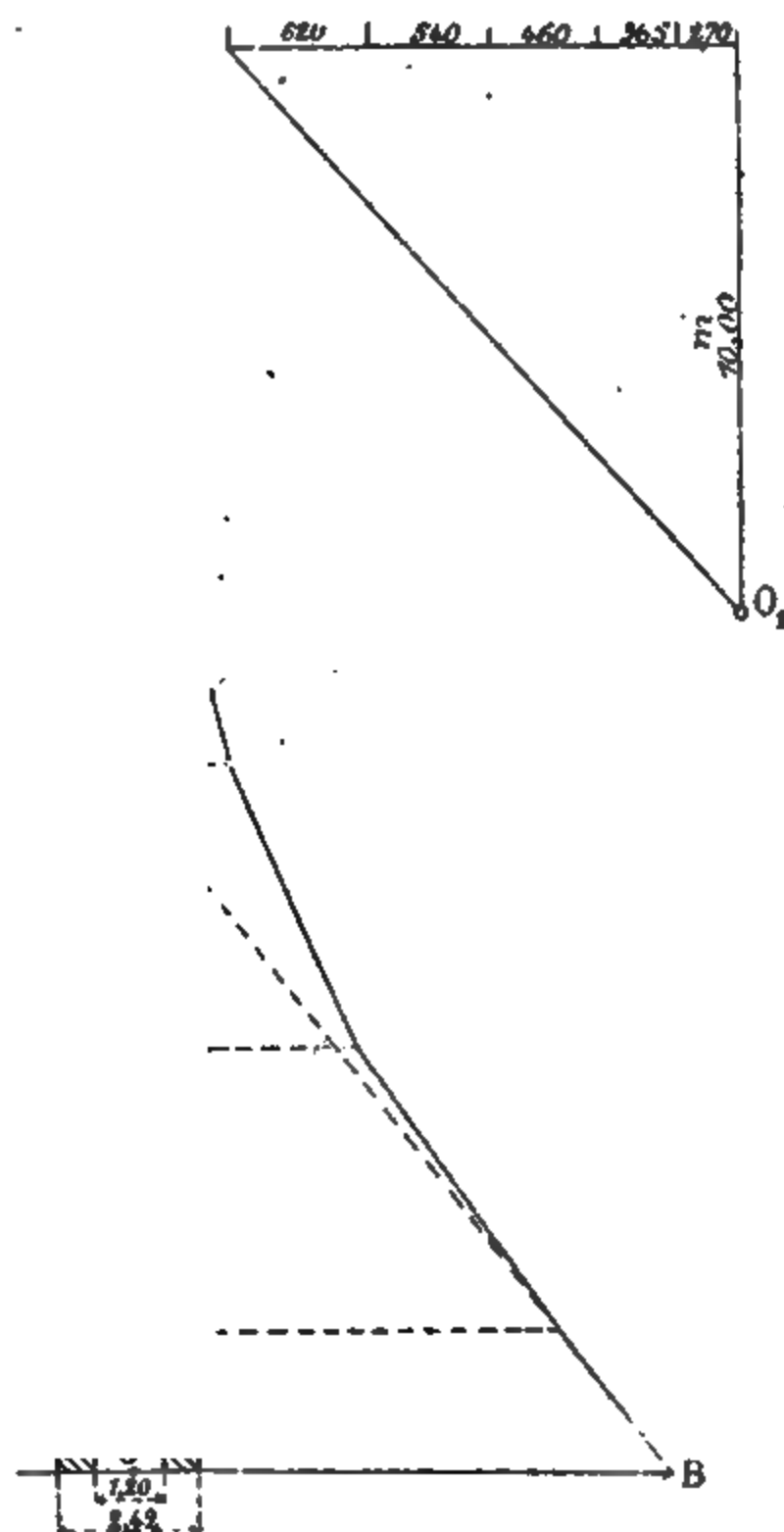


Fig. 270.

On a en ce point

$$\frac{I}{v} = \frac{\pi}{4} \frac{(R^2 - r^2)}{R} = \frac{\pi}{4} \frac{1,21^2 - 0,60^2}{1,21} = 1,300$$

La section  $\Omega = 3,4687$ ,  $N = 71.200^k$  ;

On aura par suite

$$R = \frac{71.200}{3,4687} + \frac{10 \times 2.400}{1,3000} = 2,07 + 1,85 = 3^k,92 \text{ par cm}^2$$

Le même calcul se fait en un certain nombre de points, à la partie inférieure de chacun des éléments, par exemple.

Numéros des éléments	Poids	Surface offerte au vent	Effort du vent
	k	m <sup>2</sup>	k
1	3.600	5,00	270
2	7.600	6,80	365
3	13.000	8,50	460
4	20.000	10,00	540
5	27.000	11,50	620
	71.200	41,80	2.255





## CHAPITRE DOUZIÈME

---

### TABLES ET FORMULES

§ 1. *Tables.*

§ 2. *Formules.*



## CHAPITRE DOUZIÈME

### TABLES ET FORMULES

#### § 1.

#### TABLES

Le premier tableau, page 486, donne les sections circulaires pour des diamètres de 8 à 35 correspondant aux sections des rivets et boulons généralement employés dans les constructions ; il renferme dans la première colonne les diamètres, dans la seconde les sections, et dans les suivantes les multiples de ces sections jusqu'à 9.

Le second tableau, page 487, donne les sections des cornières à branches égales. La longueur des branches est inscrite dans la première ligne horizontale, les épaisseurs se trouvent dans la première colonne en millimètres ; enfin les sections sont inscrites à la rencontre de la colonne verticale correspondant à la largeur des branches avec la ligne horizontale de l'épaisseur.

Dans le troisième tableau, page 488, on trouve, disposés de la même manière, les poids des mêmes cornières.

Les tableaux 4, 5, 6 et 7, pages 489 à 492, donnent les sections des fers plats de 35<sup>mm</sup> à 350 pour des épaisseurs variant de 1 à 20 millimètres. La section d'un fer plat se lit au point de rencontre de la colonne verticale et de la ligne horizontale correspondant à sa largeur et à son épaisseur.

Le tableau 8, page 493, donne les moments d'inertie des âmes des poutres pour des hauteurs variant de 150<sup>mm</sup> à 2000<sup>mm</sup> et

pour des épaisseurs variant de 6<sup>mm</sup> à 12<sup>mm</sup>. Pour une hauteur donnée, les moments d'inertie sont proportionnels à l'épaisseur de l'âme.

Dans les tableaux 9, 10, 11, 12, pages 494 à 497, on trouve les moments d'inertie des cornières de 50 à 100 de largeur d'aile et d'épaisseurs variables, ces moments d'inertie correspondent à 4 cornières disposées comme elles le sont généralement sur les âmes des poutres.

Dans les tableaux 13, 14, 15, 16, 17, pages 498 à 502, sont groupés les moments d'inertie des semelles de 100<sup>mm</sup> de largeur pour des hauteurs de poutre variant de 0<sup>m</sup>,200 à 2<sup>m</sup>,50 et pour des épaisseurs variant de 6 à 36<sup>mm</sup>. Les hauteurs vont de 50<sup>mm</sup> en 50<sup>mm</sup> jusqu'à 1<sup>m</sup>,00, puis de 0,100 en 0,100 jusqu'à 2<sup>m</sup>,00.

Les moments d'inertie des semelles sont proportionnels aux largeurs des semelles.

Pour avoir le moment d'inertie d'une poutre il suffit d'additionner les moments d'inertie des différentes parties qui la composent. Tous les moments d'inertie sont rapportés au mètre.

Connaissant le moment d'inertie  $I$ , on passe au rapport  $\frac{I}{r}$  du moment d'inertie à la distance  $r$  de la fibre extrême en divisant le moment d'inertie par  $r$ , qui est égal à la moitié de la hauteur de l'âme augmentée de l'épaisseur des semelles.

On calcule en général le moment d'inertie pour l'introduire dans la formule :

$$R = \frac{Mr}{I} \quad \text{ou} \quad \frac{I}{r} = \frac{M}{R}$$

où  $R$  est le coefficient de travail maximum.

On peut dans cette formule, soit exprimer  $R$  pour un mètre carré et introduire pour  $I$  les valeurs du tableau, soit, ce qui est plus commode, introduire le coefficient de travail par millimètre carré et reculer de 6 chiffres la virgule dans les moments d'inertie des tableaux.

Remarquons qu'à cet effet les moments d'inertie sont toujours donnés avec 6 chiffres après la virgule, il suffira donc de supprimer la virgule.

Les tableaux n<sup>os</sup> 18 et 19, pages 503 et 504, sont accompagnés d'une figure et d'une légende explicative, ils donnent les moments d'inertie des cornières isolées.

Le tableau n<sup>o</sup> 20, page 505, donne la densité des principaux matériaux de construction ; le tableau suivant, n<sup>o</sup> 21, page 506, contient les coefficients d'élasticité, les charges à la limite d'élasticité, les charges de rupture, les charges admissibles d'un certain nombre de ces mêmes matériaux. Ils sont donnés pour des millimètres carrés lorsqu'il s'agit de métaux et pour des centimètres carrés dans le cas des pierres et des bois.

Le tableau 22 de la page 507 donne quelques coefficients de frottement. En multipliant le poids d'un corps par ce coefficient, on obtient l'effort horizontal qui produit le glissement.

Sur la même page se trouvent les coefficients de dilatation de quelques corps ; ils donnent la variation de l'unité de longueur pour un degré de changement de température.

## 1. — Tableau des sections de rivets ou boulons.

Diamètre	SECTIONS correspondant au nombre de rivets indiqués ci-dessous.								
	1 rivet.	2	3	4	5	6	7	8	9
8	50	100	150	200	250	300	350	400	450
9	63	126	189	252	315	378	441	504	567
10	78	156	234	312	390	468	546	624	702
11	95	190	285	380	475	570	665	760	855
12	113	226	339	452	565	678	791	904	1017
13	133	266	399	532	665	798	931	1064	1197
14	154	308	462	616	770	924	1078	1232	1386
15	177	354	531	708	885	1062	1239	1416	1593
16	201	402	603	804	1005	1206	1407	1608	1809
17	227	454	681	908	1135	1362	1589	1816	2043
18	254	508	762	1016	1270	1524	1778	2032	2286
19	283	566	849	1132	1415	1698	1981	2264	2547
20	314	628	942	1256	1570	1884	2198	2512	2826
21	346	692	1038	1384	1730	2076	2422	2768	3114
22	380	760	1140	1520	1900	2280	2660	3040	3420
23	415	830	1245	1660	2075	2490	2905	3320	3735
24	452	904	1356	1808	2260	2712	3164	3616	4068
25	491	982	1473	1964	2455	2946	3437	3928	4419
26	531	1062	1593	2124	2650	3186	3717	4248	4779
27	573	1146	1719	2292	2865	3438	4011	4584	5157
28	616	1232	1848	2464	3080	3696	4312	4928	5544
29	660	1320	1980	2640	3300	3960	4620	5280	5940
30	707	1414	2121	2828	3535	4242	4949	5656	6363
31	755	1510	2265	3020	3775	4530	5285	6040	6795
32	804	1608	2412	3216	4020	4824	5628	6432	7236
33	855	1710	2565	3420	4275	5130	5985	6840	7695
34	908	1816	2724	3632	4540	5448	6356	7264	8172
35	962	1924	2886	3848	4810	5772	6734	7696	8658







1. — Tableau des poids des fers plats:

Epaisseur mm	Largeur									
	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
1	0,273	0,312	0,351	0,390	0,429	0,468	0,507	0,546	0,585	0,624
2	0,546	0,624	0,702	0,780	0,858	0,936	1,014	1,092	1,170	1,248
3	0,819	0,936	1,053	1,170	1,287	1,404	1,521	1,638	1,755	1,872
4	1,092	1,248	1,404	1,560	1,716	1,872	2,028	2,184	2,340	2,496
5	1,365	1,560	1,755	1,950	2,145	2,340	2,535	2,730	2,925	3,120
6	1,638	1,872	2,106	2,340	2,574	2,808	3,042	3,276	3,510	3,744
7	1,911	2,184	2,457	2,730	3,003	3,276	3,549	3,822	4,095	4,368
8	2,184	2,496	2,808	3,120	3,432	3,744	4,056	4,368	4,680	4,992
9	2,457	2,808	3,159	3,510	3,861	4,212	4,563	4,914	5,265	5,616
10	2,730	3,120	3,510	3,900	4,290	4,680	5,070	5,460	5,850	6,240
11	3,003	3,432	3,861	4,290	4,719	5,148	5,577	6,006	6,435	6,864
12	3,276	3,744	4,212	4,680	5,148	5,616	6,084	6,552	7,020	7,488
13	3,549	4,056	4,563	5,070	5,577	6,084	6,591	7,098	7,605	8,112
14	3,822	4,368	4,914	5,460	6,006	6,552	7,098	7,644	8,190	8,736
15	4,095	4,680	5,265	5,850	6,435	7,020	7,605	8,190	8,775	9,360
16	4,368	4,992	5,616	6,240	6,864	7,448	8,112	8,736	9,360	9,984
17	4,641	5,304	5,967	6,630	7,293	7,956	8,619	9,282	9,945	10,608
18	4,914	5,616	6,318	7,020	7,722	8,424	9,126	9,828	10,530	11,232
19	5,187	5,928	6,669	7,410	8,151	8,892	9,633	10,374	11,115	11,856
20	5,460	6,240	7,020	7,800	8,580	9,360	10,140	10,920	11,700	12,480

5. — Tableau des poids des fers plats.

Epaisseur mm	Largeur								
	90	100	110	120	130	140	150	160	170
	k	k	k	k	k	k	k	k	k
1	0,702	0,780	0,858	0,936	1,014	1,092	1,170	1,248	1,326
2	1,404	1,560	1,716	1,872	2,028	2,184	2,340	2,496	2,652
3	2,106	2,340	2,574	2,808	3,042	3,276	3,510	3,744	3,978
4	2,808	3,120	3,432	3,744	4,056	4,368	4,680	4,992	5,304
5	3,510	3,900	4,290	4,680	5,070	5,460	5,850	6,240	6,630
6	4,212	4,680	5,148	5,616	6,084	6,552	7,020	7,488	7,956
7	4,914	5,460	6,006	6,552	7,098	7,644	8,190	8,736	9,282
8	5,616	6,240	6,864	7,488	8,112	8,736	9,360	9,984	10,608
9	6,318	7,020	7,722	8,424	9,126	9,828	10,530	11,232	11,934
10	7,020	7,800	8,580	9,360	10,140	10,920	11,700	12,480	13,260
11	7,722	8,580	9,438	10,296	11,154	12,012	12,870	13,728	14,586
12	8,424	9,360	10,296	11,232	12,168	13,104	14,040	14,976	15,912
13	9,126	10,140	11,154	12,168	13,182	14,196	15,210	16,224	17,238
14	9,828	10,920	12,012	13,104	14,196	15,288	16,380	17,472	18,564
15	10,530	11,700	12,870	14,040	15,210	16,380	17,550	18,720	19,890
16	11,232	12,480	13,728	14,976	16,224	17,472	18,720	19,968	21,216
17	11,934	13,260	14,586	15,912	17,238	18,564	19,890	21,216	22,542
18	12,636	14,040	15,444	16,848	18,252	19,656	21,060	22,464	23,868
19	13,338	14,820	16,302	17,784	19,266	20,748	22,230	23,712	25,194
20	14,040	15,600	17,160	18,720	20,280	21,840	23,400	24,960	26,520

6. — Tableau des poids des fers plats.

Épaisseur mm	Largeur								
	180	190	200	210	220	230	240	250	260
	k	k	k	k	k	k	k	k	k
1	1,401	1,482	1,560	1,638	1,716	1,794	1,872	1,950	2,028
2	2,808	2,964	3,120	3,276	3,432	3,588	3,744	3,900	4,056
3	4,212	4,446	4,680	4,914	5,148	5,382	5,616	5,850	6,084
4	5,616	5,928	6,240	6,552	6,864	7,176	7,488	7,800	8,112
5	7,020	7,410	7,800	8,190	8,580	8,970	9,360	9,750	10,140
6	8,424	8,892	9,360	9,828	10,296	10,764	11,232	11,700	12,168
7	9,828	10,374	10,920	11,466	12,012	12,558	13,104	13,650	14,196
8	11,232	11,856	12,480	13,104	13,728	14,352	14,976	15,600	16,224
9	12,636	13,338	14,040	14,742	15,444	16,146	16,848	17,550	18,252
10	14,040	14,820	15,600	16,380	17,160	17,940	18,720	19,500	20,280
11	15,444	16,302	17,160	18,018	18,876	19,734	20,592	21,450	22,308
12	16,848	17,784	18,720	19,656	20,592	21,528	22,464	23,400	24,336
13	18,252	19,266	20,280	21,294	22,308	23,322	24,336	25,350	26,364
14	19,656	20,748	21,840	22,932	24,024	25,116	26,208	27,300	28,392
15	21,060	22,230	23,400	24,570	25,740	26,910	28,080	29,250	30,420
16	22,464	23,712	24,960	26,208	27,456	28,704	29,952	31,200	32,448
17	23,868	25,194	26,520	27,846	29,172	30,498	31,823	33,150	34,476
18	25,272	26,676	28,080	29,484	30,888	32,292	33,696	35,100	36,504
19	26,676	28,158	29,640	31,122	32,604	34,086	35,568	37,050	38,532
20	28,080	29,640	31,200	32,760	34,320	35,880	37,440	39,000	40,560

7. — Tableau des poids des fers plats.

Épaisseur mm	Largeur								
	270	280	290	300	310	320	330	340	350
	k	k	k	k	k	k	k	k	k
1	2,106	2,184	2,262	2,340	2,418	2,493	2,574	2,652	2,730
2	4,212	4,368	4,524	4,680	4,836	4,992	5,148	5,304	5,460
3	6,318	6,552	6,786	7,020	7,254	7,488	7,722	7,956	8,190
4	8,424	8,736	9,048	9,360	9,672	9,984	10,296	10,608	10,920
5	10,530	10,920	11,310	11,700	12,090	12,480	12,870	13,260	13,650
6	12,636	13,104	13,572	14,040	14,508	14,976	15,444	15,912	16,380
7	14,742	15,288	15,834	16,380	16,926	17,472	18,018	18,564	19,110
8	16,848	17,472	18,096	18,720	19,344	19,968	20,592	21,216	21,840
9	18,954	19,656	20,358	21,060	21,762	22,464	23,166	23,868	24,570
10	21,060	21,840	22,620	23,400	24,180	24,960	25,740	26,520	27,300
11	23,166	24,024	24,882	25,740	26,598	27,456	28,314	29,172	30,030
12	25,272	26,208	27,144	28,080	29,016	29,952	30,888	31,824	32,760
13	27,378	28,392	29,406	30,420	31,434	32,448	33,462	34,476	35,490
14	29,484	30,576	31,668	32,760	33,852	34,944	36,036	37,128	38,220
15	31,590	32,760	33,930	35,100	36,270	37,440	38,610	39,780	40,950
16	33,696	34,944	36,192	37,440	38,688	39,936	41,184	42,432	43,680
17	35,802	37,128	38,454	39,780	41,106	42,432	43,758	45,084	46,410
18	37,908	39,312	40,716	42,120	43,524	44,928	46,332	47,736	49,140
19	40,014	41,496	42,978	44,460	45,912	47,424	48,906	50,388	51,870
20	42,120	43,680	45,240	46,800	48,360	49,920	51,480	53,040	54,600

## 8. — Moment d'inertie des âmes.

Hauteur de l'âme	Epaisseur de l'âme						
	6	7	8	9	10	11	12
150	0,000.002	0,000.002	0,000.002	0,000.002	0,000.003	0,000.033	0,000.003
200	004	005	005	006	007	007	008
250	008	009	010	012	013	014	016
300	013	016	018	020	022	025	027
350	021	025	028	032	036	039	043
400	032	037	043	048	053	059	064
450	046	053	061	068	076	083	091
500	062	073	083	094	104	114	125
550	0,000.083	0,000.097	0,000.111	0,000.125	0,000.139	0,000.152	0,000.166
600	108	126	144	162	180	198	216
650	137	160	183	206	229	252	275
700	171	200	229	257	286	314	343
750	211	246	281	316	351	387	422
800	256	299	341	384	427	469	512
850	307	358	409	461	512	563	614
900	364	425	486	547	607	668	729
950	429	500	572	643	714	786	857
1.000	500	583	667	750	833	917	0,001.000
1.100	0,000.665	0,000.776	0,000.887	0,000.998	0,001.109	0,001.220	0,001.331
1.200	864	0,001.009	0,001.152	0,001.296	1.440	1.584	1.728
1.300	0,001.099	1.281	1.465	1.648	1.831	2.014	2.197
1.400	1.372	1.601	1.829	2.058	2.287	2.515	2.744
1.500	1.687	1.969	2.250	2.531	2.813	3.094	3.375
1.600	2.048	2.389	2.730	3.072	3.413	3.754	4.096
1.700	2.456	2.866	3.275	3.685	4.094	4.504	4.913
1.800	2.916	3.402	3.888	4.374	4.860	5.346	5.832
1.900	3.429	4.001	4.572	5.144	5.715	6.287	6.859
2.000	4.000	4.666	5.333	6.000	6.666	7.333	8.000

## 9. — Moments d'inertie de 4 cornières.

Hauteur de la poutre	50 × 50		60 × 60				
	Ep. 6	7	6	7	8	9	10
0,200	0,000.017	0,000.019	0,000.020	0,000.022	0,000.025	0,000.028	0,000.030
0,250	028	032	033	037	042	047	051
0,300	042	048	049	056	064	071	077
0,350	058	067	069	079	090	099	109
0,400	078	090	092	106	120	133	146
0,450	100	115	119	137	155	172	189
0,500	125	144	149	172	194	216	237
0,550	0,000.153	0,000.176	0,000.183	0,000.211	0,000.238	0,000.265	0,000.290
0,600	184	212	220	253	286	318	350
0,650	218	251	260	300	339	377	414
0,700	254	293	304	351	396	441	484
0,750	293	338	351	405	458	510	560
0,800	335	386	402	464	524	583	641
0,850	380	438	456	526	595	662	728
0,900	428	493	513	593	670	746	820
0,950	478	551	574	663	750	835	918
1,000	532	613	639	737	834	928	0,001.020
1,050	0,000.588	0,000.678	0,000.706	0,000.816	0,000.923	0,001.027	0,001.129
1,100	647	746	778	898	1.016	1.131	1.243
1,150	709	817	852	984	1.113	1.240	1.363
1,200	773	891	930	0,001.074	1.215	1.353	1.488
1,250	841	969	0,001.011	1.168	1.322	1.472	1.619
1,300	912	0,001.050	1.096	1.266	1.433	1.596	1.755
1,350	984	1.134	1.185	1.368	1.548	1.725	1.897
1,400	0,001.060	1.222	1.276	1.474	1.668	1.858	2.044
1,450	1.139	1.313	1.372	1.584	1.793	1.997	2.197
1,500	1.220	1.407	1.470	1.698	1.921	2.141	2.355
2,000	2.190	2.527	2.643	3.054	3.457	3.852	4.239

## 10. — Moments d'inertie de 4 cornières.

Hauteur de la poutre	70 × 70				80 × 80		
	7	8	9	10	8	9	10
0,200	0,000.023	0,000.028	0,000.032	0,000.034	0,000.032	0,000.035	0,000.038
0,250	043	048	053	058	053	059	065
0,300	064	073	081	089	081	090	099
0,350	091	103	114	125	115	128	141
0,400	123	138	153	169	155	173	190
0,450	158	179	199	218	201	224	247
0,500	198	225	249	275	254	283	311
0,550	0,000.244	0,000.276	0,000.307	0,000.337	0,000.312	0,000.348	0,000.382
0,600	293	332	370	306	376	419	462
0,650	348	394	438	482	447	498	548
0,700	407	461	513	565	523	583	642
0,750	471	533	594	653	606	676	744
0,800	539	610	680	749	694	775	853
0,850	612	693	773	850	789	880	970
0,900	690	781	871	959	890	992	0,001.094
0,950	772	875	975	0,001.073	997	0,001.112	1.226
1,000	859	973	0,001.085	1.194	0,001.110	1.239	1.365
1,100	0,001.047	0,001.186	0,001.323	0,001.457	0,001.354	0,001.511	0,001.666
1,200	1.254	1.421	1.584	1.745	1.622	1.811	1.997
1,300	1.479	1.670	1.869	2.058	1.915	2.138	2.357
1,400	1.723	1.932	2.178	2.399	2.233	2.492	2.748
1,500	1.986	2.250	2.509	2.764	2.575	2.871	3.169
1,600	2.267	2.569	2.865	3.157	2.940	3.282	3.620
1,700	2.567	2.909	3.245	3.575	3.330	3.718	4.100
1,800	2.885	3.270	3.648	4.018	3.741	4.181	4.611
1,900	3.222	3.651	4.074	4.489	4.183	4.671	5.152
2,000	3.577	4.055	4.524	4.985	4.646	5.189	5.723
2,500	0,005.635	0,006.388	0,007.128	0,007.853	0,007.326	0,008.183	0,009.027



## 11. — Moments d'inertie de 4 cornières.

Hauteur de la poutre	80 × 80		90 × 90				
	11	12	9	10	11	12	13
0,200	0,000.042	0,000.044	0,000.039	0,000.042	0,000.046	0,000.049	0,000.052
0,250	071	076	065	071	078	083	089
0,300	108	116	099	109	119	128	137
0,350	153	165	142	156	169	183	196
0,400	207	223	191	211	229	248	265
0,450	269	290	249	274	298	322	346
0,500	339	366	314	346	377	407	437
0,550	0,000.417	0,000.450	0,000.387	0,050.426	0,000.465	0,000.502	0,000.539
0,600	503	544	467	515	561	607	652
0,650	598	646	556	612	668	723	776
0,700	700	757	652	718	783	848	911
0,750	811	877	755	832	908	983	0,001.056
0,800	930	0,001.006	866	955	0,001.043	0,001.128	1.213
0,850	0,001.058	1.144	986	0,001.087	1.186	1.284	1.380
0,900	1.193	1.291	0,001.112	1.227	1.337	1.450	1.558
0,950	1.337	1.446	1.247	1.374	1.501	1.625	1.747
1,000	1.489	1.611	1.389	1.532	1.672	1.810	1.947
1,100	0,001.817	0,001.968	0,001.696	0,001.871	0,002.043	0,002.213	0,002.379
1,200	2.179	2.357	2.034	2.244	2.451	2.654	2.855
1,300	2.573	2.784	2.403	2.651	2.895	3.137	3.374
1,400	3.000	3.247	2.803	3.093	3.378	3.659	3.937
1,500	3.459	3.744	3.233	3.567	3.898	4.222	4.543
1,600	3.951	4.278	3.694	4.077	4.454	4.826	5.192
1,700	4.476	4.846	4.186	4.620	5.047	5.469	5.885
1,800	5.034	5.451	4.709	5.197	5.679	6.153	6.621
1,900	5.623	6.091	5.263	5.809	6.347	6.877	7.400
2,000	6.248	6.766	5.847	6.453	7.052	7.642	8.224
2,500	0,009.857	0,010.675	0,009.230	0,010.190	0,011.136	0,012.069	0,012.990

## 12. — Moments d'inertie de 4 cornières.

Hauteur de la poutre	100 × 100					
	10	11	12	13	14	15
0,200	0,000.046	0,000.049	0,000.053	0,000.057	0,000.060	0,000.063
0,250	077	084	091	097	103	109
0,300	119	129	140	149	159	169
0,350	170	183	199	214	228	242
0,400	230	251	271	291	310	329
0,450	300	327	354	380	405	430
0,500	379	414	448	480	513	545
0,550	0,000.468	0,000.511	0,000.553	0,000.594	0,000.634	0,000.674
0,600	567	618	669	719	768	816
0,650	674	736	797	856	915	973
0,700	792	864	936	0,001.006	0,001.075	0,001.143
0,750	919	0,001.003	0,001.086	1.167	1.248	1.328
0,800	0,001.055	1.152	1.248	1.342	1.434	1.526
0,850	1.200	1.311	1.421	1.528	1.634	1.738
0,900	1.356	1.481	1.605	1.726	1.846	1.964
0,950	1.521	1.662	1.800	1.937	2.071	2.203
1,000	1.695	1.852	2.007	2.159	2.309	2.457
1,100	0,002.073	0,002.264	0,002.454	0,002.641	0,002.825	0,003.006
1,200	2.488	2.719	2.946	3.171	3.392	3.610
1,300	2.941	3.214	3.483	3.750	4.011	4.270
1,400	3.432	3.751	4.066	4.377	4.684	4.985
1,500	3.961	4.330	4.694	5.053	5.407	5.757
1,600	4.529	4.951	5.367	5.778	6.183	6.583
1,700	5.134	5.612	6.085	6.551	7.011	7.465
1,800	5.777	6.316	6.849	7.373	7.891	8.402
1,900	6.458	7.061	7.656	8.244	8.823	9.395
2,000	7.177	7.847	8.509	9.163	9.808	0,010.444
2,500	0,011.343	0,012.405	0,013.452	0,014.487	0,015.510	0,016.518

13. — Moments d'inertie des semelles de 100<sup>mm</sup> de largeur.

Épaisseur des semelles	Hauteur entre les semelles					
	0,200	0,250	0,300	0,350	0,400	0,450
6	0,000.013	0,000.020	0,000.028	0,000.038	0,000.049	0,000.062
7	015	023	033	045	058	073
8	017	027	038	051	066	084
9	019	030	043	058	075	095
10	022	034	048	065	084	106
11	0,000.024	0,000.037	0,000.053	0,000.072	0,000.093	0,000.117
12	027	041	058	079	102	128
13	029	045	064	086	111	139
14	032	049	069	093	120	151
15	035	053	074	100	129	162
16	037	057	080	107	138	173
17	040	061	085	114	148	185
18	043	065	091	122	157	197
19	046	069	097	129	167	208
20	048	073	102	137	176	221
21	0,000.051	0,000.077	0,000.108	0,000.145	0,000.186	0,000.233
22	054	081	114	152	196	245
23	057	086	120	160	206	257
24	060	090	126	168	216	270
25	063	095	132	176	226	282
26	067	099	138	184	236	295
27	070	104	145	192	246	307
28	073	108	151	200	257	320
29	076	113	157	209	267	333
30	080	118	164	217	278	346
31	0,000.083	0,000.123	0,000.170	0,000.225	0,000.288	0,000.359
32	087	128	177	234	299	372
33	090	133	184	243	310	385
34	094	138	190	251	321	399

14. — Moments d'inertie des semelles de 100<sup>mm</sup> de largeur.

Epaisseur des semelles	Hauteur entre les semelles					
	0,500	0,550	0,600	0,650	0,700	0,750
6	0,000.077	0,000.093	0,000.110	0,000.129	0,000.149	0,000.171
7	090	108	129	151	175	200
8	103	124	148	173	200	230
9	116	141	167	195	226	259
10	130	157	186	218	252	289
11	0,000.144	0,000.173	0,000.205	0,000.240	0,000.278	0,000.318
12	157	189	225	263	304	348
13	171	206	244	286	330	378
14	185	223	263	309	357	409
15	199	239	284	332	383	439
16	213	256	304	355	410	469
17	227	273	324	378	437	500
18	241	290	344	402	464	531
19	256	308	364	425	491	562
20	270	325	384	449	518	593
21	0,000.285	0,000.342	0,000.405	0,000.473	0,000.546	0,000.624
22	300	360	426	497	573	656
23	315	378	446	521	601	687
24	330	396	467	545	629	719
25	345	413	488	570	657	751
26	360	432	510	594	685	783
27	375	450	531	619	714	815
28	391	468	552	644	742	848
29	406	486	574	669	771	880
30	422	505	596	694	800	913
31	0,000.437	0,000.524	0,000.618	0,000.719	0,000.829	0,000.946
32	453	542	640	745	858	979
33	469	561	662	770	887	1.012
34	485	580	684	796	916	1.045

15. — Moments d'inertie des semelles de 100<sup>mm</sup> de largeur.

Épaisseur des semelles	Hauteur entre les semelles					
	0,800	0,850	0,900	0,950	1,000	1,100
7	0,000.228	0,000.237	0,000.288	0,000.320	0,000.355	0,000.429
8	261	294	330	367	406	491
9	294	332	372	414	458	553
10	328	370	414	461	510	616
11	362	408	456	508	562	679
12	396	446	499	553	614	742
13	430	484	542	603	667	805
14	464	522	585	650	720	869
15	498	561	628	698	773	932
16	533	600	671	746	826	996
17	567	639	715	795	879	0,001.061
18	602	678	758	843	933	1.125
19	637	717	802	892	986	1.190
20	672	757	846	941	0,001.040	1.254
21	0,000.708	0,000.796	0,000.891	0,000.990	0,001.095	0,001.320
22	743	836	935	0,001.039	1.149	1.385
23	779	877	980	1.089	1.204	1.450
24	815	917	0,001.025	1.139	1.258	1.516
25	851	957	1.069	1.188	1.313	1.582
26	887	998	1.115	1.239	1.369	1.648
27	924	0,001.038	1.160	1.289	1.424	1.715
28	960	1.079	1.206	1.339	1.480	1.782
29	997	1.121	1.252	1.390	1.536	1.849
30	0,001.033	1.162	1.298	1.441	1.592	1.916
31	0,001.071	0,001.203	0,001.344	0,001.492	0,001.648	0,001.983
32	1.108	1.245	1.391	1.543	1.704	2.051
33	1.145	1.287	1.437	1.595	1.761	2.119
34	1.183	1.329	1.484	1.647	1.818	2.187
35	1.221	1.371	1.531	1.699	1.875	2.256
36	1.259	1.414	1.578	1.751	1.933	2.324

16. — Moments d'inertie des semelles de 100<sup>mm</sup> de largeur.

Épaisseur des semelles	Hauteur entre les semelles					
	1,200	1,300	1,400	1,500	1,600	1,700
7	0,000.510	0,000.598	0,000.693	0,000.795	0,000.904	0,001.029
8	584	684	793	910	1.031	1.167
9	658	771	893	0,001.024	1.165	1.314
10	732	858	994	1.140	1.296	1.462
11	807	945	0,001.095	1.256	1.427	1.610
12	881	0,001.033	1.196	1.372	1.559	1.758
13	956	1.121	1.298	1.488	1.691	1.907
14	0,001.032	1.209	1.400	1.604	1.823	2.036
15	1.107	1.297	1.502	1.721	1.956	2.206
16	1.183	1.385	1.604	1.839	2.089	2.356
17	1.259	1.474	1.707	1.956	2.222	2.506
18	1.335	1.563	1.810	2.074	2.356	2.656
19	1.412	1.653	1.913	2.192	2.490	2.807
20	1.488	1.742	2.016	2.310	2.624	2.958
21	0,001.565	0,001.832	0,002.120	0,002.429	0,002.759	0,003.110
22	1.643	1.923	2.224	2.548	2.894	3.262
23	1.720	2.013	2.329	2.668	3.029	3.414
24	1.798	2.104	2.433	2.787	3.165	3.567
25	1.876	2.195	2.538	2.907	3.301	3.720
26	1.954	2.286	2.644	3.027	3.437	3.873
27	2.033	2.377	2.749	3.148	3.574	4.027
28	2.111	2.469	2.855	3.269	3.711	4.181
29	2.190	2.561	2.961	3.390	3.848	4.335
30	2.270	2.653	3.068	3.512	3.986	4.490
31	0,002.349	0,002.745	0,003.174	0,003.634	0,004.124	0,004.645
32	2.429	2.839	3.281	3.756	4.262	4.800
33	2.509	2.932	3.389	3.878	4.401	4.956
34	2.589	3.026	3.496	4.001	4.539	5.112
35	2.670	3.120	3.604	4.124	4.679	5.269
36	2.751	3.214	3.712	4.247	4.818	5.425

17. — Moments d'inertie des semelles de 100<sup>mm</sup> de largeur.

Épaisseur des semelles	Hauteur entre les semelles				
	1,800	1,900	2,000	2,500	
7	0,001.142	0,001.273	0,001.409	0,002.200	
8	1.307	1.456	1.613	2.516	
9	1.473	1.640	1.817	2.833	
10	1.638	1.824	2.022	3.150	
11	1.804	2.008	2.224	3.468	
12	1.970	2.193	2.429	3.786	
13	2.137	2.379	2.634	4.105	
14	2.303	2.564	2.839	4.424	
15	2.471	2.750	3.045	4.744	
16	2.638	2.937	3.251	5.064	
17	2.806	3.124	3.458	5.385	
18	2.975	3.311	3.665	5.706	
19	3.143	3.498	3.873	6.028	
20	3.312	3.686	4.080	6.350	
21	0,003.482	0,003.875	0,004.289	0,006.673	
22	3.652	4.064	4.497	6.997	
23	3.822	4.253	4.707	7.320	
24	3.993	4.442	4.916	7.645	
25	4.163	4.632	5.126	7.970	
26	4.335	4.822	5.336	8.295	
27	4.506	5.013	5.547	8.621	
28	4.678	5.204	5.758	8.947	
29	4.851	5.396	5.970	9.274	
30	5.024	5.588	6.182	9.602	
31	0,005.197	0,005.780	0,006.394	0,009.930	
32	5.370	5.972	6.607	0,010.258	
33	5.544	6.166	6.820	10.587	
34	5.719	6.359	7.034	10.916	
35	5.893	6.553	7.248	11.246	
36	6.068	6.747	7.462	11.577	

# § 1 — TABLES

*Dimensions, sections, poids, moments d'inertie des co à branches égales.* — Dans le tableau suivant se trouvent les dimensions, les surfaces de section en mill carrés et les poids au mètre courant des cornières à branches égales ; on y trouve aussi la position du centre de gravité, les moments d'inertie  $J$ ,  $J_1$ ,  $J'$ , et  $J''$  par rapport aux axes indiqués sur la fig. 271, et enfin les rapports  $\frac{J}{v}$  et  $\frac{J_1}{v}$ .

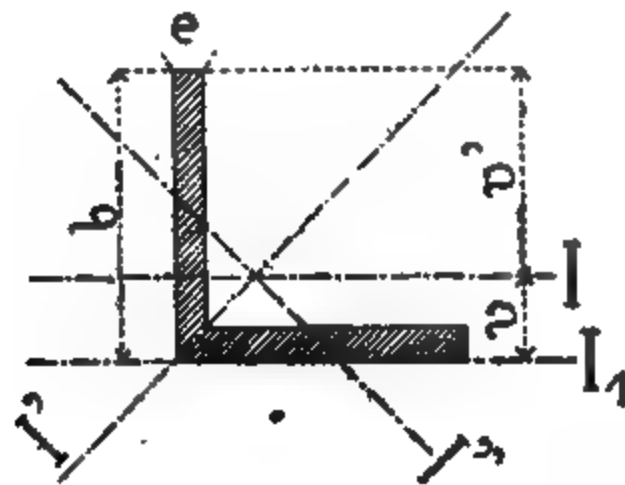


Fig. 271.

## 18. — Moments d'inertie des cornières à branches ég

Largeur b	Épaisseur e	Section	Poids au mètre courant	v	Moments d'inertie				
					$J$	$J_1$	$J'$	$J''$	
mm	mm	mm	kg	mm					
60	6	634	5,83	17,2	0,000.000.435	0,000.000.281	0,000.000.372	0,000.000.090	0,4
	7	791	6,20	17,6	511	264	421	0,000.000.107	
	8	896	7,00	17,9	596	296	470	122	
	9	999	7,80	18,8	662	327	515	138	
	10	1100	8,60	18,6	780	350	559	152	
65	7	1011	6,72	18,7	0,000.000.646	0,000.000.342	0,000.000.544	0,000.000.139	0,4
	8	976	7,61	19,1	742	383	577	160	
	9	1089	8,49	19,4	838	424	668	180	
	10	1200	9,36	19,8	936	463	725	201	
	11	1309	10,19	20,1	0,000.001.039	501	779	222	
70	7	981	7,3	20,1	0,000.000.806	0,000.000.428	0,000.000.687	0,000.000.168	0,4
	8	1056	8,2	20,6	931	459	719	190	
	9	1179	9,2	20,8	0,000.001.046	530	847	218	
	10	1300	10,1	21,1	1.163	583	938	238	
	11	1419	11,0	21,6	1.290	624	0,000.0 1.065	277	
	12	1536	11,9	21,8	1.405	671	0.995	221	





## 20. — Densité des principaux matériaux de construction.

Acier forgé	7,81	Caoutchouc	0,93
Acier fondu	7,83—7,92	Charbon de terre	1,21—1,51
Acier doux	7,83	Ciment tassé	1,66—2,00
Ardoise	2,61—2,67	Craie blanche	1,80—2,66
Argile	1,70—2,30	Cuivre fondu	8,60—8,90
Asphalte comprimé	2,10	Cuivre martelé	8,78—9,00
Béton	1,90—2,40	Fil de fer	7,6—7,75
<i>Bois séché à l'air :</i>		Fer forgé	7,6—7,9
Aune	0,55	Fer laminé	7,8
Bouleau	0,63—0,74	Fonte	7,2
Buis	0,97	Granit	2,6—2,8
Cèdre	0,60	Gravier	1,4—1,8
Cerisier	0,65	Grès	1,9—2,7
Châtaignier	0,60	Maçonnerie fraîche à mortier de chaux et moellons	2,46
Chêne	0,92	Maçonneriesècheà mortier dechaux et moellons	2,40
Erable	0,68	Maçonnerie en meulière	1,2 à 1,5
Frêne	0,67	Maçonnerie sèche en briques	1,5 à 1,7
Gayac	1,33	Maçonnerie en briques creu- ses,	0,9—1,2
Hêtre	0,76	Marbre	2,5—2,85
Liège	0,24	Marne	1,57—2,53
Melèze	0,47—0,56	Mortier de chaux sec	1,64
Noyer	0,66—0,90	Neige	0,10—0,125
Orme	0,58	Plomb	11,376
Peuplier	0,40—0,47	Sable fin humide	1,9
Pin	0,55—0,73	Sable fin sec	1,4—1,64
Poirier	0,65—0,73	Gros sable sec	1,37—1,41
Pommier	0,73	Terre argileuse damée	2,06
Prunier	0,80—0,87	Terre sèche maigre	1,34
Sapin	0,50—0,65	Verre à vitre	2,53
Saule	0,49—0,59	Zinc laminé	7,2
Tilleul	0,45—0,60	Zinc fondu	6,86—7,14
Briques	1,4—2,2		
Bronze	8,3—8,8		
Bronze phosphoré	8,8		

## Elasticité et résistance de quelques matériaux de construction.

DESIGNATION	Coefficient d'élasticité  E par mm²	Charge limite d'élasticité		Charge de rupture		Charges admissibles	
		Traction	Com- pression	Traction	Com- pression	Traction	Com- pression
<b>Métaux :</b>							
		PAR mm²					
iné sens longitudinal	20.000	16,5	16,5	32—38	26 à 30	6—8	6—8
ur.....	22.000	40,0	40,0	65	79	8—12	8—12
oyen.....	22.000	34,0	34,0	55	67	»	»
oux.....	22.000	28,0	28,0	45	55	»	»
.....	10.000	6,0	16,0	13	78	2—3	6—8
martelé.....	11.600	3,0	»	22	57	»	»
.....	6.900	4,0	»	23	»	»	»
.....	9.000	»	»	2	»	»	»
<b>Bois :</b>							
		PAR cm²					
ns longitudinal)...	11.0000	270	120	800	400	40—60	40—60
.....	12.0000	270	120	800	400	40—60	40—60
.....	10.0000	270	120	700	350	40	40
.....	12.0000	270	120	1000	500	40—60	60—80
.....	11.0000	270	120	950	480	40—60	60—80
<b>ss et Maçonnerie :</b>							
		PAR cm²					
.....	120—560	»	»	30—60	800—1600	»	40—50
3.....	170—560	»	»	24—40	600—1000	»	25—30
.....	45—370	»	»	8—30	200—800	»	25—30
.....	»	»	»	5—7	120—200	»	7—10
.....	»	»	»	10	80—150	»	8—10
de Portland.....	»	»	»	13	100—300	»	»
r de ciment.....	»	»	»	»	»	»	8—12
nerie en pierre dure.	»	»	»	»	»	»	15—20
nerie en meulière..	»	»	»	»	»	»	6—8
<b>de fondations :</b>							
.....	»	»	»	»	»	»	2—6
f.....	»	»	»	»	»	»	5—8
.....	»	»	»	»	»	»	4—6
<b>Matériaux divers :</b>							
.....	»	»	»	»	1700	»	»

22. — Tableau des valeurs des coefficients de frottement.

Désignation	Rapport du frottement à la pression	
	au départ	pendant le mouvement
Chêne sur chêne sans enduit .....	0,54	0,34
Fer sur chêne, sans enduit.....	0,62	0,62
Fer sur chêne mouillés.....	0,65	0,26
Fer sur fer sans enduit.....		0,44
Calcaire sur calcaire .....	0,74	0,64
Grès sur grès avec mortier frais.....	0,66	

23. — Tableau des coefficients de dilatation linéaire.

Plomb .....	0,0000285
Verre .....	0,0000086
Fonte .....	0,0000111
Cuivre .....	0,0000172
Fer.....	0,0000123
Acier non trempé.....	0,0000108
Acier trempé.....	0,0000124
Zinc.....	0,0000294
Etain .....	0,0000194
Maçonnerie de briques de champ .....	0,0000089
Maçonnerie de briques en long .....	0,0000049
Pierres de taille.....	0,0000050 à 0,000009

## § 2

## FORMULES

Comme nous l'avons annoncé dans la préface, nous terminons ce volume en donnant un certain nombre de formules dont l'ingénieur-constructeur a continuellement besoin. Il ne faut pas se laisser effrayer par la complication apparente de quelques-unes d'entre elles ; en procédant méthodiquement, on arrive au but sans trop de travail.

## I. Théorème des trois moments.

Les moments fléchissants  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , sur trois appuis consécutifs d'une poutre continue, sont liés par la formule suivante :

$$l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2) M_2 + l_2 M_3 + \frac{1}{4} p_1 l_1^3 + \frac{1}{4} p_2 l_2^3 = 0$$

Dans cette formule  $p_1$  et  $p_2$  sont les charges par unité de longueur de poutre dans les travées I et II. Les valeurs des  $p$  et des  $l$  sont toujours positives, celles des  $M$  sont en général négatives.

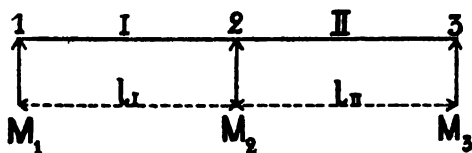


Fig. 272.

## II. Moments sur piles pour des poutres de 2 à 10 travées.

En appliquant la formule des trois moments à des poutres à 2 travées inégales, de longueur  $l_1$  et  $l_2$ , et à des poutres de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 travées, ayant les deux travées de rives égales d'une longueur  $l_1$ , et toutes les travées intermédiaires égales d'une longueur  $l_2$ , en désignant de plus par  $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$  les charges uniformément réparties sur les travées 1, 2, 3, 4... et par  $M_1, M_2, M_3, \dots$  les moments sur les piles 1, 2, 3... on arrive aux formules suivantes (fig. 273).

Ces formules donnent les moments sur les piles d'une moitié de la poutre, celles des piles de l'autre moitié sont les mêmes ; il suffit de changer le numérotage en le mettant de droite à gauche au lieu de le mettre de gauche à droite.

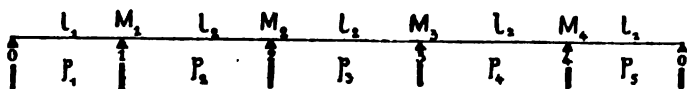


Fig. 273

### 1° Poutres à deux travées inégales

$$M_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}$$

### 2° Poutres à trois travées dont les deux extrêmes sont égales

$$M_1 = \frac{2p_1(l_1^4 + l_1^3 l_2) + p_2(l_2^4 + 2l_1 l_2^3) - p_3(l_1^3 l_2)}{4(4l_1^2 + 8l_1 l_2 + 3l_2^2)}$$

$$M_2 = \frac{-p_1 l_1^3 l_2 + p_2(l_2^4 + 2l_1 l_2^3) + 2p_3(l_1^4 + l_1^3 l_2)}{4(4l_1^2 + 8l_1 l_2 + 3l_2^2)}$$

### 3° Poutres à quatre travées, dont les deux centrales sont égales ainsi que les deux extrêmes

$$M_1 = \frac{p_1 (8l_1^4 + 7l_1^3 l_2) + p_2 (5l_2^4 + 6l_1 l_2^3) - p_3 (2l_1 l_2^3 + l_2^4) + p_4 l_1^3 l_2}{4 (16l_1^2 + 12l_2^2 + 28l_1 l_2)}$$

$$M_2 = \frac{-p_1 l_1^3 + p_2 (2l_1 l_2^2 + l_2^3) + p_3 (2l_1 l_2^2 + l_2^3) - p_4 l_1^3}{2 (16l_1 + 12l_2)}$$

$$M_3 = \frac{p_1 l_1^3 l_2 - p_2 (2l_1 l_2^3 + l_2^4) + p_3 (5l_2^4 + 6l_1 l_2^3) + p_4 (8l_1^4 + 7l_1^3 l_2)}{4 (16l_1^2 + 12l_2^2 + 28l_1 l_2)}$$

4° *Poutres à cinq travées dont les deux extrêmes sont égales ainsi que les trois centrales*

$$M_1 = \frac{p_1 (30 l_1^4 + 26 l_1^3 l_2) + p_2 (22 l_1 l_2^3 + 19 l_2^4) - p_3 (6 l_1 l_2^3 + 5 l_2^4)}{4 (60 l_1^2 + 104 l_1 l_2 + 45 l_2^2)} + \frac{p_4 (2 l_1 l_2^3 + l_2^4) - p_5 l_1^3 l_2}{4 (60 l_1^2 + 104 l_1 l_2 + 45 l_2^2)}$$

$$M_2 = \frac{-p_1 (8l_1^4 + 7l_1^3 l_2) + p_2 (16l_1^2 l_2^2 + 22l_1 l_2^3 + 7l_2^4) + p_3 (12l_1^2 l_2^2 + 22l_1 l_2^3 + 10l_2^4) - p_4 (4l_1^2 l_2^2 + 6l_1 l_2^3 + 2l_2^4) + p_5 (2l_1^4 + 2l_1^3 l_2)}{4 (60 l_1^2 + 104 l_1 l_2 + 45 l_2^2)}$$

5° *Poutres à six travées dont les quatre centrales sont égales ainsi que les deux extrêmes*

$$M_1 = \frac{p_1 (112 l_1^4 + 97 l_1^3 l_2) + p_2 (82 l_1 l_2^3 + 71 l_2^4) - p_3 (22 l_1 l_2^3 + 19 l_2^4) + p_4 (6 l_1 l_2^3 + 5 l_2^4) - p_5 (2 l_1 l_2^3 + l_2^4) + p_6 l_1^3 l_2}{8 (112 l_1^2 + 194 l_1 l_2 + 84 l_2^2)}$$

$$M_2 = \frac{-p_1 (15l_1^4 + 13l_1^3 l_2) + p_2 (30l_1^2 l_2^2 + 41l_1 l_2^3 + 13l_2^4) + p_3 (22l_1^2 l_2^2 + 41l_1 l_2^3 + 19l_2^4) - p_4 (6l_1^2 l_2^2 + 11l_1 l_2^3 + 5l_2^4) + p_5 (2l_1^2 l_2^2 + 3l_1 l_2^3 + l_2^4) - p_6 (l_1^4 + l_1^3 l_2)}{4 (112 l_1^2 + 194 l_1 l_2 + 84 l_2^2)}$$

$$M_3 = \frac{p_1 (8l_1^4 + 7l_1^3 l_2) - p_2 (16l_1^2 l_2^2 + 22l_1 l_2^3 + 7l_2^4) + p_3 (48l_1^2 l_2^2 + 82l_1 l_2^3 + 35l_2^4) + p_4 (48l_1^2 l_2^2 + 82l_1 l_2^3 + 35l_2^4) - p_5 (16l_1^2 l_2^2 + 22l_1 l_2^3 + 7l_2^4) + p_6 (8l_1^4 + 7l_1^3 l_2)}{8 (112 l_1^2 + 194 l_1 l_2 + 84 l_2^2)}$$

6° *Poutres à sept travées dont les cinq centrales sont égales ainsi que les deux extrêmes*

$$M_1 = \frac{p_1 (418 l_1^4 + 362 l_1^3 l_2) + p_2 (306 l_1 l_2^3 + 265 l_2^4) - p_3 (82 l_1 l_2^3 + 71 l_2^4) + p_4 (22 l_1 l_2^3 + 19 l_2^4) - p_5 (6 l_1 l_2^3 + 5 l_2^4) + p_6 l_1^3 l_2}{4 (836 l_1^2 + 627 l_1 l_2 + 1448 l_2^2)}$$

$$\begin{aligned}
 & + 19l_2^4) - p_3(6l_1l_2^3 + 5l_2^4) + p_6(2l_1l_2^3 + l_2^4) - p_7l_1^3l_2 \\
 & \quad \frac{4(836l_1^3 + 627l_2^3 + 1448l_1l_2)}{4} \\
 M_2 = & \frac{-p_1(97l_1^3l_2 + 112l_1^4) + p_2(224l_1^2l_2^3 + 306l_1l_2^3 + 97l_2^4) + p_3(164l_1^2l_2^3 + 306l_1l_2^3 + 142l_2^4) - p_4(44l_1^2l_2^3 + 82l_1l_2^3 + 38l_2^4) + p_5(12l_1^2l_2^3 + 22l_1l_2^3 + 10l_2^4) -}{4(836l_1^3 + 627l_2^3 + 1448l_1l_2)} \\
 & \quad - p_6(4l_1^2l_2^3 + 6l_1l_2^3 + 2l_2^4) + p_7(2l_1^4 + 2l_1^3l_2) \\
 & \quad \frac{4(836l_1^3 + 627l_2^3 + 1448l_1l_2)}{4} \\
 M_3 = & \frac{p_1(26l_1^2l_2 + 30l_1^4) - p_2(60l_1^2l_2^3 + 82l_1l_2^3 + 26l_2^4) + p_3(180l_1^2l_2^3 + 306l_1l_2^3 + 130l_2^4) + p_4(176l_1^2l_2^3 + 306l_1l_2^3 + 133l_2^4) - p_5(48l_1^2l_2^3 + 82l_1l_2^3 + 35l_2^4) +}{4(836l_1^3 + 627l_2^3 + 1448l_1l_2)} \\
 & \quad + p_6(16l_1^2l_2^3 + 22l_1l_2^3 + 7l_2^4) - p_7(8l_1^4 + 7l_1^3l_2) \\
 & \quad \frac{4(836l_1^3 + 627l_2^3 + 1448l_1l_2)}{4}
 \end{aligned}$$

7° Poutres à huit travées dont les six centrales sont égales  
ainsi que les deux extrêmes

$$\begin{aligned}
 M_1 = & \frac{p_1(1560l_1^4 + 1351l_1^3l_2) + p_2(1142l_1l_2^3 + 989l_2^4) - p_3(306l_1l_2^3 + 265l_2^4) +}{4(3120l_1^3 + 5404l_1l_2 + 2340l_2^2)} \\
 & + p_4(82l_1l_2^3 + 71l_2^4) - p_5(22l_1l_2^3 + 19l_2^4) + p_6(6l_1l_2^3 + 5l_2^4) - p_7(2l_1l_2^3 + l_2^4) + p_8l_1^3l_2 \\
 & \quad \frac{4(3120l_1^3 + 5404l_1l_2 + 2340l_2^2)}{4} \\
 M_2 = & \frac{-p_1(418l_1^4 + 362l_1^3l_2) + p_2(836l_1^2l_2^3 + 1142l_1l_2^3 + 362l_2^4) + p_3(612l_1^2l_2^3 + 1142l_1l_2^3 + 530l_2^4) - p_4(164l_1^2l_2^3 + 306l_1l_2^3 + 142l_2^4) + p_5(44l_1^2l_2^3 + 82l_1l_2^3 + 38l_2^4) - p_6(12l_1^2l_2^3 + 22l_1l_2^3 + 10l_2^4) + p_7(4l_1^2l_2^3 + 6l_1l_2^3 + 2l_2^4) - p_8(2l_1^4 + 2l_1^3l_2)}{4(3120l_1^3 + 5404l_1l_2 + 2340l_2^2)} \\
 & \quad \frac{4(3120l_1^3 + 5404l_1l_2 + 2340l_2^2)}{4} \\
 M_3 = & \frac{p_1(112l_1^4 + 97l_1^3l_2) - p_2(224l_1^2l_2^3 + 306l_1l_2^3 + 97l_2^4) + p_3(672l_1^2l_2^3 + 1142l_1l_2^3 + 485l_2^4) + p_4(656l_1^2l_2^3 + 1142l_1l_2^3 + 497l_2^4) - p_5(176l_1^2l_2^3 + 306l_1l_2^3 + 133l_2^4) + p_6(48l_1^2l_2^3 + 82l_1l_2^3 + 35l_2^4) - p_7(16l_1^2l_2^3 + 22l_1l_2^3 + 7l_2^4) + p_8(8l_1^4 + 7l_1^3l_2)}{4(3120l_1^3 + 5404l_1l_2 + 2340l_2^2)} \\
 & \quad \frac{4(3120l_1^3 + 5404l_1l_2 + 2340l_2^2)}{4} \\
 M_4 = & \frac{-p_1(30l_1^4 + 26l_1^3l_2) + p_2(60l_1^2l_2^3 + 82l_1l_2^3 + 26l_2^4) - p_3(180l_1^2l_2^3 + 306l_1l_2^3 + 130l_2^4) + p_4(660l_1^2l_2^3 + 1142l_1l_2^3 + 494l_2^4) + p_5(660l_1^2l_2^3 + 1142l_1l_2^3 + 494l_2^4) -}{4(3120l_1^3 + 5404l_1l_2 + 2340l_2^2)} \\
 & \quad \frac{4(3120l_1^3 + 5404l_1l_2 + 2340l_2^2)}{4}
 \end{aligned}$$



$$\frac{-p_6(180l_1^2l_2^2+306l_1l_2^3+130l_2^4)+p_7(60l_1^2l_2^2+82l_1l_2^3+26l_2^4)-p_8(30l_1^3+26l_1^2l_2)}{4(3120l_1^2+5404l_1l_2+2340l_2^2)}$$

8° Poutres à neuf travées dont les sept centrales sont égales  
ainsi que les deux extrêmes

$$M_1 = \frac{p_1(5822l_1^4+5042l_1^3l_2)+p_2(1262l_1l_2^3+3691l_2^4)-p_3(1142l_1l_2^3+989l_2^4)+}{4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2)} \\ +p_4(306l_1l_2^3+265l_2^4)-p_5(82l_1l_2^3+71l_2^4)+p_6(22l_1l_2^3+19l_2^4)-p_7(6l_1l_2^3+5l_2^4)+ \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2) \\ +p_8(2l_1l_2^3+l_2^4)-p_9(l_1^2l_2) \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2)$$

$$M_2 = \frac{-p_1(1560l_1^4+1351l_1^3l_2)+p_2(3120l_1^2l_2^2+4262l_1l_2^3+1351l_2^4)+}{4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2)} \\ +p_3(2284l_1^2l_2^2+4262l_1l_2^3+1978l_2^4)-p_4(612l_1^2l_2^2+1142l_1l_2^3+530l_2^4)+ \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2) \\ +p_5(164l_1^2l_2^2+306l_1l_2^3+142l_2^4)-p_6(44l_1^2l_2^2+82l_1l_2^3+38l_2^4)+p_7(12l_1^2l_2^2+ \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2) \\ +22l_1l_2^3+10l_2^4)-p_8(4l_1^2l_2^2+6l_1l_2^3+2l_2^4)+p_9(2l_1^4+2l_1^2l_2) \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2)$$

$$M_3 = \frac{p_1(418l_1^4+362l_1^3l_2)-p_2(836l_1^2l_2^2+1142l_1l_2^3+362l_2^4)+p_3(2508l_1^2l_2^2+}{4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2)} \\ +4262l_1l_2^3+1810l_2^4)+p_4(2448l_1^2l_2^2+4262l_1l_2^3+1855l_2^4)-p_5(656l_1^2l_2^2+ \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2) \\ +1142l_1l_2^3+497l_2^4)+p_6(176l_1^2l_2^2+306l_1l_2^3+133l_2^4)-p_7(48l_1^2l_2^2+82l_1l_2^3+ \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2) \\ +35l_2^4)+p_8(16l_1^2l_2^2+22l_1l_2^3+7l_2^4)-p_9(8l_1^4+7l_1^2l_2) \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2)$$

$$M_4 = \frac{-p_1(112l_1^4+97l_1^3l_2)+p_2(224l_1^2l_2^2+306l_1l_2^3+97l_2^4)-p_3(672l_1^2l_2^2+}{4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2)} \\ +1142l_1l_2^3+485l_2^4)+p_4(2464l_1^2l_2^2+4262l_1l_2^3+1843l_2^4)+p_5(2460l_1^2l_2^2+ \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2) \\ +4262l_1l_2^3+1846l_2^4)-p_6(660l_1^2l_2^2+1142l_1l_2^3+494l_2^4)+p_7(180l_1^2l_2^2+ \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2) \\ +306l_1l_2^3+130l_2^4)-p_8(60l_1^2l_2^2+82l_1l_2^3+26l_2^4)+p_9(30l_1^4+26l_1^2l_2) \\ 4(11644l_1^2+20168l_1l_2+8733l_2^2)$$

9° Poutres à dix travées dont les huit centrales sont égales  
ainsi que les deux extrêmes

$$M_1 = \frac{p_1(21728l_1^4+18817l_1^3l_2)+p_2(15906l_1l_2^3+13775l_2^4)-p_3(4262l_1l_2^3+}{4(43456l_1^2+75268l_1l_2+32502l_2^2)}$$

$$\begin{aligned}
& +360l_1^4 + p_1(1142l_1l_2^3 + 980l_2^4) - p_3(306l_1l_2^3 + 265l_2^4) + p_6(82l_1l_2^3 + 71l_2^4) \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& \quad - p_7(22l_1l_2^3 + 10l_2^4) + p_8(6l_1l_2^3 + 5l_2^4) - p_9(2l_1l_2^3 + l_2^4) + p_{10}l_1^3l_2 \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
M_2 = & \frac{-p_1(5822l_1^4 + 5042l_1^3l_2) + p_2(11644l_1^2l_2^2 + 15906l_1l_2^3 + 5042l_2^4) +}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& + p_3(8524l_1^2l_2^2 + 15906l_1l_2^3 + 7382l_2^4) - p_4(2284l_1^2l_2^2 + 4262l_1l_2^3 + 1978l_2^4) + \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& + p_5(612l_1^2l_2^2 + 1142l_1l_2^3 + 530l_2^4) - p_6(164l_1^2l_2^2 + 306l_1l_2^3 + 142l_2^4) + \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& + p_7(44l_1^2l_2^2 + 82l_1l_2^3 + 38l_2^4) - p_8(12l_1^2l_2^2 + 22l_1l_2^3 + 10l_2^4) + p_9(4l_1^2l_2^2 + 6l_1l_2^3 + \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& \quad + 2l_2^4) - p_{10}(2l_1^4 + 2l_1^3l_2) \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
M_3 = & \frac{p_1(1560l_1^4 + 135l_1^3l_2) - p_2(3120l_1^2l_2^2 + 4262l_1l_2^3 + 135l_2^4) +}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& + p_3(9360l_1^2l_2^2 + 15903l_1l_2^3 + 6755l_2^4) + p_4(9136l_1^2l_2^2 + 15906l_1l_2^3 + 6923l_2^4) - \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& - p_5(2448l_1^2l_2^2 + 4262l_1l_2^3 + 1855l_2^4) + p_6(656l_1^2l_2^2 + 1142l_1l_2^3 + 497l_2^4) - \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& - p_7(176l_1^2l_2^2 + 306l_1l_2^3 + 133l_2^4) + p_8(48l_1^2l_2^2 + 82l_1l_2^3 + 35l_2^4) - p_9(16l_1^2l_2^2 + \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& \quad + 22l_1l_2^3 + 7l_2^4) + p_{10}(8l_1^4 + 7l_1^3l_2) \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
M_4 = & \frac{-p_1(418l_1^4 + 362l_1^3l_2) + p_2(836l_1^2l_2^2 + 1142l_1l_2^3 + 362l_2^4) - p_3(2508l_1^2l_2^2 +}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& + 4262l_1l_2^3 + 1810l_2^4) + p_4(9196l_1^2l_2^2 + 15906l_1l_2^3 + 6878l_2^4) + p_5(9180l_1^2l_2^2 + \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& + 15906l_1l_2^3 + 6890l_2^4) - p_6(2460l_1^2l_2^2 + 4262l_1l_2^3 + 1846l_2^4) + p_7(660l_1^2l_2^2 + \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& + 1142l_1l_2^3 + 494l_2^4) - p_8(180l_1^2l_2^2 + 306l_1l_2^3 + 130l_2^4) + p_9(60l_1^2l_2^2 + 82l_1l_2^3 + \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& \quad + 26l_2^4) - p_{10}(30l_1^4 + 26l_1^3l_2) \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
M_5 = & \frac{-p_1(112l_1^4 + 97l_1^3l_2) - p_2(224l_1^2l_2^2 + 303l_1l_2^3 + 97l_2^4) + p_3(672l_1^2l_2^2 +}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)} \\
& + 1142l_1l_2^3 + 485l_2^4) - p_4(2164l_1^2l_2^2 + 4262l_1l_2^3 + 1843l_2^4) + p_5(9184l_1^2l_2^2 + \\
& \quad \frac{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}{4(43456l_1^2 + 75268l_1l_2 + 32592l_2^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{+15906l_1l_2^2+6887l_2^4)+p_6(9184l_1^2l_2^2+15906l_1l_2^3+6887l_2^4)-p_7(2464l_1^2l_2^2}{4(43456l_1^3+75268l_1l_2+32592l_2^2)} \\
 & \frac{+4262l_1l_2^3+1843l_2^4)+p_8(672l_1^2l_2^2+1142l_1l_2^3+485l_2^4)-p_9(224l_1^2l_2^2+}{4(43456l_1^3+75268l_1l_2+32592l_2^2)} \\
 & \frac{+306l_1l_2^3+97l_2^4)+p_{10}(112l_1^4+97l_1^2l_2)}{4(43456l_1^3+75268l_1l_2+32592l_2^2)}
 \end{aligned}$$

### III. Formules empiriques de résistance ou flambage des pièces chargées debout.

*Formule de Rankine :*

Pilier à faces planes

$$f = \frac{P}{\omega} \left( 1 + a \frac{l^2}{J} \omega \right)$$

ou

$$P = \frac{f\omega}{1 + a \frac{l^2 \omega}{J}}$$

Pilier articulé à ses extrémités.

$$P = \frac{f\omega}{1 + 4a \frac{l^2 \omega}{J}}$$

Dans ces formules :

P est la charge agissant sur le pilier ;

l la longueur du pilier ;

$\omega$  sa surface de section ;

J le moment d'inertie de la section ;

f l'intensité totale des plus grandes actions moléculaires ;

a un coefficient déterminé par l'expérience.

Les valeurs de a et de f sont les suivantes pour la résistance P admissible :

	a	f par cm <sup>2</sup>
Fer	0,0001	750 <sup>k</sup>
Fonte	0,0008	1.500 <sup>k</sup>
Bois	0,0008	70 <sup>k</sup>

*Formules de Hodgkinson.*

Ces formules ne s'appliquent également qu'aux cylindres ou aux prismes rectangulaires.

1° Pour les cylindres pleins :

$$P = A \frac{d^{3.6}}{l^{1.7}}$$

où

P est la charge

d le diamètre de la section ;

l la longueur de la pièce.

2° Pour des cylindres creux :

$$P = A \frac{(d_1^{3.6} - d_0^{3.6})}{l^{1.7}}$$

$d_1$  étant le diamètre extérieur ;

$d_0$  le diamètre intérieur.

Les valeurs du coefficient A sont les suivantes :

Piliers pleins en fonte avec extrémités arron-

dies	$1.100 \times 10^6$
------	---------------------

Piliers pleins en fonte avec extrémités plates	$3.200 \times 10^6$
--	---------------------

Piliers creux en fonte avec extrémités arron-

dies	$2.700 \times 10^6$
------	---------------------

Piliers creux en fonte avec extrémités plates	$3.200 \times 10^6$
---	---------------------

*Règle de Rondelet pour les bois.* — Nous trouvons cette règle dans la résistance des matériaux de M. Collignon :

Le rapport de la longueur à la moindre dimension transversale étant l'un des nombres

1	12	24	36	48	60	72
---	----	----	----	----	----	----

la limite extrême de la charge que peut supporter sans fléchir latéralement ou sans écraser une pièce de chêne ou de sapin est, en kilogrammes par centimètre carré

420	350	210	140	70	35	$17 \frac{1}{2}$
-----	-----	-----	-----	----	----	------------------

la limite pratique à adopter dans les constructions doit être réduite au septième de la limite extrême, ce qui donne par centimètre carré

60	50	30	20	10	5	$2 \frac{1}{2}$
----	----	----	----	----	---	-----------------

FIN.

## ERRATA

Pages Lignes

299 14

Au lieu de : calcul approximatif, lire :  
calcul complet.

303 Formule 3

Au lieu de :

$$\Delta Q_h = - \frac{E \cdot \Delta h}{y_s y_x \Sigma \frac{\Delta s}{I}}$$

lire :

$$\Delta Q_h = \frac{E \Delta h}{y_s y_x \Sigma \frac{\Delta s}{I}}$$

303

remplacer tous les  $y_x$  par  $y_x$ .

408

7

Au lieu de : à gauche de C, lire : à droite  
de C.

Planche I

Au lieu de :

$$I_{1,2} = 0,000279 \quad \text{et} \quad I_{5,6,7} = 0,000535,$$

lire :

$$I_{1,2} = 0,000535 \quad \text{et} \quad I_{5,6,7} = 0,000279.$$



89080441942



b89080441942a

